Første utkast til et notat for MA1102 våren 2009. Kom gjerne med tilbakemeldinger!

1 Komplekse tall

Målsetningen med dette avsnittet er å motivere Eulers formel

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1}$$

og se litt hvordan vi kan bruke denne formelen. Vi vil starte med en liten repetisjon om komplekse tall.

1.1 Grunnleggende om komplekse tall

Vi begynner med en del repetisjon. Hvis du føler at du har et godt forhold til hva komplekse tall er, hvordan addere og multiplisere med dem både algebraisk og "geometrisk", så kan du hoppe rett til 1.2 på side 6. Merker du at det er ting du ikke har helt dreisen på kan du jo alltids komme tilbake hit.

Hva er et komplekst tall, og hvorfor bruker vi dem? Her er to fremstillinger av hva komplekse tall er.

1.1.1 Første fremstilling

Vi har definert kvadratroten av et tall x som et tall y som er slik at y ganget med seg selv gir x, med andre ord $y^2 = x$. Hvis x er et positivt tall får vi to muligheter, både y og $-y$ vil fungere, og vi sier at kvadratroten er den av disse som er positiv. Hvis x er et negativt tall har vi derimot et problem. Uansett hvilket reelt tall y vi tar, så vil y^2 ikke kunne bli negativ. En mulig løsning på dette "problemet" er å lage noen nye tall som vil være løsninger. La oss si at vi har et tall i som er slik at $i^2 = -1$. Da vil alle negative tall x også ha to tall y som er slik at $y^2 = x$.

Eksempel 1 *Ta $x = -4$. Da vil både $y = 2i$ og $y = -2i$ fungere.*

$$(2i)^2 = 2^2 i^2 = 4(-1) = -4$$
$$(-2i)^2 = (-2)^2 i^2 = 4(-1) = -4$$

Vi kaller tall som er (reelle) multipler av i for *imaginære tall* og kombinasjoner (summer) av reelle og imaginære tall for *komplekse tall.* En vanlig skriveform er

$$z = x + iy \tag{2}$$

der x og y er reelle tall. Vi kaller x for realdelen til det komplekse tallet z og y for imaginærdelen, og skriver

$$\Re z = x$$
$$\Im z = y$$

1.1.2 Andre fremstilling

Her er en litt annen innfallsvinkel til det samme. Vi har en formel for å løse andregradsligninger

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3}$$

som ser slik ut

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

Eksempel 2

$$x^2 - 1 = 0 \tag{5}$$

Vi kan selvfølgelig skrive $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ og bruke dette til å finne to løsninger, men poenget her er å illustrere bruken av formelen. Med den får vi

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1(-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm\sqrt{4}}{2} = \pm 1 \tag{6}$$

Så vi har at $x = 1$ og $x = -1$ er løsninger.

Eksempel 3

$$x^2 + x + 1 = 0 \tag{7}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} \tag{8}$$

En mulig tolkning av dette eksempelet er at ligningen ikke har noen løsninger. Det er en helt akseptabel tolkning. Vi kan også velge å tolke $x = 1/2 + (\sqrt{3}/2)\sqrt{-1}$ og $x = 1/2 - (\sqrt{3}/2)\sqrt{-1}$ som løsninger, men da må vi utvide tallsystemet vårt til å inkludere slike tall.

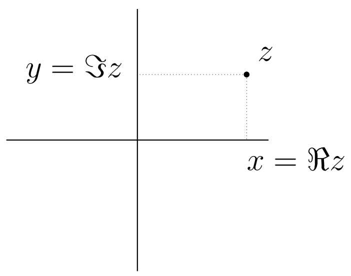
Hvis vi godtar røtter av negative tall har vi altså løsninger for alle andregradsligninger.

1.1.3 Noen kommentarer

Det er på tide med noen kommentarer. Dette har vært en oppvarming/påminning av ting dere har gjort tidligere. Det er derfor en del ting vi ikke har tatt med. For eksempel har vi brukt en del regneregler som vi ikke har diskutert. Hovedideen er at ting fungerer mer eller mindre som for reelle tall. Vi har heller ikke diskutert hva et tallsystem skal være, og om vi har fått det ut fra hva vi har gjort, men vi skal la også dette ligge. Det er også legitimt å spørre hvorfor vi har gjort dette. Er det ikke OK å bare si at vi ikke vil ha kvadratrøtter til negative tall og at ligninger som $x^2+x+1=0$ i Eksempel 3 rett og slett ikke har noen løsninger? Det korte svaret på dette er at jo, det har du helt rett i. Det er heller ikke disse eksemplene som var motivasjonen for introduksjonen til komplekse tall. Grunnen til at vi har valgt disse innfallsvinklene er at de er de som raskest illusterer hva komplekse tall er.

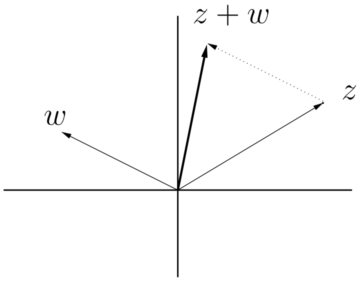
1.1.4 Hvordan kan vi representere komplekse tall?

Vi har allerede sett at vi kan skrive et komplekst tall z som $z = x + iy$ der x og y er reelle tall. Vi har tidligere sett hvordan et reelt tall x kan representeres grafisk som et sted på tallinja. Vi kan nå se for oss at $x = \Re z$ representeres grafisk på en tallinje og $y = \Im z$ på en annen. Vi kan nå sette disse to tallinjene normalt på hverandre slik at de krysser hverandre i null på hver linje. Da kan et komplekst tall z representeres som et punkt P i planet og et punkt i planet kan representeres som et komplekst tall.



Figur 1: Kartesiske koordinater

Vi kan nå representere addisjon av komplekse tall som vektoraddisjon. Tallet z kan ses på som punktet P som kan ses på som vektoren $\mathbf{v}$ fra origo til P. Tilsvarende kan tallet w ses på som punktet Q som igjen kan ses på som vektoren $\mathbf{u}$ fra origo til Q. Tallet $z+w$ kan nå ses på som punktet R som vi får ved å gå med vektoren $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ fra origo. (Skriv $z = x+iy$ og $w = s+it$ og overbevis degselv om dette.)

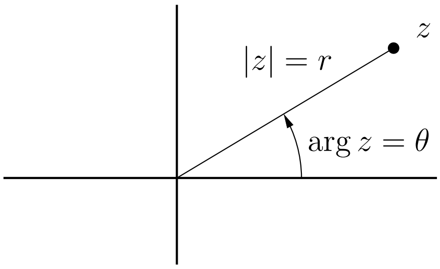


Figur 2: Addisjon

Vi har tidligere sett hvordan punkt i planet ikke bare kan beskrives med kartesiske koordinater, men også med polarkoordinater. Når vi ser på komplekse tall som punkt i planet kan vi derfor assosiere til dem disse koordinatene. Vi kaller lengden fra origo for normen til z, og skriver $|z|$. Vinklene kaller vi for argumentet til z og skriver $\arg z$. Hvis vi til tallet z assosierer punktet P med polarkoordinater $[r, \theta]$ har vi altså

$$r = |z|$$
$$\theta = \arg z$$

Legg merke til at på samme måten som det er (uendelig) mange vinkler assosiert til et punkt er det (uenedlig) mange argument assosiert til et tall.



Figur 3: Polarkoordinater

La oss stoppe opp et lite sekund og se tilbake til hva vi kom hit for. Målsetningen vår er å motivere Eulers formel

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Ut fra det vi har sagt så langt kan vi si litt om det som står på høyre side: Hvis θ er et reelt tall er det som står på høyre side et komplekst tall som vi kan assosiere med et punkt med polarkoordinater $[1, \theta]$. $e^{i\theta}$ skal altså være et komplekst tall med norm 1. Vi kan så langt se på dette som en kompakt form å skrive et komplekst tall med norm 1 og argument θ.

1.1.5 Multiplikasjon av komplekse tall

Hvis vi har to komplekse tall, $z = x + iy$ og $w = s + it$ så fungerer multiplikasjon slik du kan se for deg at det burde:

$$\begin{aligned} zw = (x + iy)(s + it) &= xs + xit + iys + iyit \\ &= xs + i(xt + ys) + i^2yt = (xs - yt) + i(xt + ys) \end{aligned} \quad (9)$$

Her har vi brukt at $i^2 = -1$. Du kan selvfølgelig pugge dette, men det enkleste er nok å gjøre utregningene slik vi nettopp gjorde.

Eksempel 4

$$(1 + i)(1 - i) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot i + i \cdot 1 - i^2 = 1 - i + i - (-1) = 2 \quad (10)$$

Vi hadde en geometrisk representasjon av addisjon av komplekse tall som addisjon av vektorer. Klarer vi å gi en geometrisk representasjon av muliplikasjon? La oss se litt mer på eksempelet vi nettopp gikk gjennom.

Eksempel 5 *$z = 1 + i$ kan representeres som punktet $(1, 1)$ i kartesiske koordinater og $[\sqrt{2}, \pi/4]$ i polarkoordinater. Dermed ser vi at vi kan skrive*

$$z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) = \sqrt{2}e^{i(\pi/4)}$$

(Vi har brukt Eulers formel i den siste likheten.) Tilsvarende får vi

$$w = 1 - i = \sqrt{2}(cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4)) = \sqrt{2}e^{i(7\pi/4)}.$$

La oss se hva som skjer hvis vi bruker vanlige regneregler for potenser:

$$\begin{aligned} zw = (\sqrt{2}e^{i(\pi/4)})(\sqrt{2}e^{i(7\pi/4)}) &= \sqrt{2}\sqrt{2}e^{i(\pi/4)}e^{i(7\pi/4)} = 2e^{i(\pi/4)+i(7\pi/4)} \\ &= 2e^{i2\pi} = 2(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = 2 \end{aligned} \quad (11)$$

Som var det vi fikk første gangen vi regnet dette også.

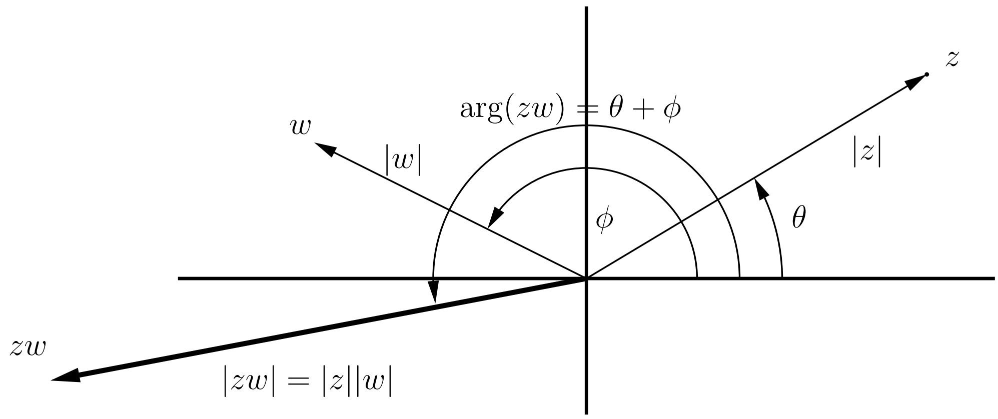
Det kan altså se ut som følgende er sant.

Påstand 6 *Hvis vi multipliserer to komplekse tall får vi et nytt komplekst tall som har norm lik produktet av normene og argument lik summen av argumentene. Med andre ord*

$$|zw| = |z||w|$$
$$arg(zw) = argz + argw$$

Legg merke til at i eksempelet vårt kunne vi for eksempel også tatt $argw = -\pi/4$. Det ville gitt $argzw = 0$, men det vil fortsatt være det samme komplekse tallet.

Oppgave 7 *Bevis påstanden. Det er ikke snakk om noe mer enn å bruke det du kan om sammenhengen mellom kartesiske koordinater og polarkoordinater.*



Figur 4: Multiplikasjon

1.2 Eulers formel

Vi skal bruke det vi har funnet ut om potensrekker for å motivere Eulers formel. Vi vet at Taylorrekken generert av $f(x) = e^x$ om $x = 0$ er $1 + x + x^2/2 + x^3/3! + \cdots$ og at denne rekken konvergerer mot funksjonen, med andre ord at

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{12}$$

når x er et reelt tall. La oss se hva som skjer hvis vi setter inn $x = i\theta$ i (12). Legg merke til at dette er en rent formell operasjon, det er ingen som har sagt at dette er en meningsfull operasjon. Denslags får vente til et senere kurs. La oss legge denne bekymringen til side, og late som at det vi gjør både har mening og at vi fremdeles har likhet. Da får vi

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \cdots \tag{13}$$

$$= 1 + i\theta + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + i^6\frac{\theta^6}{6!} + \cdots \tag{14}$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \tag{15}$$

Her har vi ikke gjort noe annet enn å bruke at $i^2 = -1$. Vi vet at rekken i (12) konvergerer absolutt, slik at vi kan bytte om på rekkefølgen til leddene som vi vil. Ut fra det som vi nettopp har sett ser det fristende ut å først summere sammen alle leddene med partalls potens og deretter alle leddene med oddetals potens. I såfall får vi (under den vanlige forutsetningen om at det vi gjør er meningsfylt og riktig)

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots && (16) \\
&= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots) + (i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \cdots) && (17) \\
&= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots) && (18)
\end{aligned}
$$

Vi kjenner igjen rekkene innenfor hver av parentesene som Taylorrekkene om $\theta = 0$ til henholdsvis $\cos\theta$ og $\sin\theta$. Med andre ord har vi (med de forbeholdene vi har tatt) at

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

som var det vi ønsket å motivere.

Vi vet nå hva vi vil mene med e^x (her har vi sett flere innfallsvinkler) og $e^{i\theta}$ når x og θ er reelle tall. Men hva med e^z når $z = x + iy$ er et komplekst tall? Hvis vi beholder reglene vi kjenner for potensregning så får vi

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

med andre ord er e^z et komplekst tall med norm e^x og argument y

$$
\begin{aligned}
|e^z| &= \Re z \\
arg z &= \Im z
\end{aligned}
$$

Legg merke til at realdelen og imaginærdelen til z påvirker tallet e^z på veldig forskjellige måter. Hva skjer når du øker $\Re z$ og hva skjer når du øker $\Im z$?

1.3 Eksempler

Her er noen eksempler på bruk av Eulers formel.

Eksempel 8

$$
\begin{aligned}
e^i &= cos 1 + i\sin 1 \approx 0{,}54 + i0{,}84 && (19) \\
e^{i\pi} &= -1 && (20) \\
e^{i\pi/2} &= i && (21)
\end{aligned}
$$

Eksempel 9 *Hvis du ikke husker dobbeltvinkelformlene har du nå en grei måte å utlede dem på: Kvadrer hver av sidene i Eulers formel.*

$$
\begin{aligned}
e^{i2x} &= (e^{ix})^2 = (\cos x + i\sin x)^2 \\
\cos(2x) + i\sin(2x) &= (\cos^2 x - \sin^2 x) + i(2\cos x\sin x)
\end{aligned}
$$

så vi må ha

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x$$

Eksempel 10 *På lignende vis kan vi også finne de mer generelle vinkelsumformlene:*

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia}e^{ib} \\ \cos(a+b) + i\sin(a+b) &= (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) \\ \cos(a+b) + i\sin(a+b) &= (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\cos a\sin b + \sin a\cos b) \end{aligned}$$

At realdelene og imaginærdelene må være like gir oss vinkelsumformlene.

Eksempel 11 *Et lite eksempel på bruk av vinkelsumformlene. Vi vil skrive* $3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ *på formen* $A\sin(a+b)$. *Start med å skrive* $(\sqrt{3}, 3)$ *som et multipel av en vektor med lengde en:*

$$(\sqrt{3}, 3) = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2}(1/2, \sqrt{3}/2) = 2\sqrt{3}(\cos\pi/3, \sin\pi/3)$$

så vi får

$$3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2\sqrt{3}(\sin\pi/3\cos\theta + \cos\pi/3\sin\theta) = 2\sqrt{3}\sin(\theta + \pi/3)$$

Eksempel 12 *Finn alle tallene* z *som er slik at* $z^3 = 1$.

Hvis vi bare hadde nøyd oss med reelle tall, hadde vi bare hatt en løsning, men her vil vi få tre:

Vi skriver mulige løsninger som $z = re^{i\theta}$. *Da må vi ha* $z^3 = (re^{i\theta})^3 = r^3e^{i3\theta} = 1$. *For å få riktig norm må vi ha* r *et reelt positivt tall slik at* $r^3 = 1$, *og der finnes det bare en mulighet, nemlig* $r = 1$. *Hvis vi ser på* 1 *som et komplekst tall har det argument som er et multipel av* 2π, *så vi må ha* $3\theta = 2k\pi$ *som gir oss* $\theta = 2k\pi/3$. *Med* $k = 0, 1, 2$ *får vi de tre løsningene*

$$z_1 = e^{i0} = 1 \tag{22}$$
$$z_2 = e^{i2\pi/3} = -1/2 + i\sqrt{3}/2 \tag{23}$$
$$z_3 = e^{i4\pi/3} = -1/2 - i\sqrt{3}/2 \tag{24}$$

Du kan sjekke selv at andre muligheter for k *gir de samme tallene.*

Oppgave 13 *Finn alle tall* z *som er slik at* $z^2 = 1 + i$.

1.4 Alternativ motivering for Eulers formel

Over brukte vi det vi har lært om Taylorrekker, spesielt Taylorrekken til e^x om $x = 0$, for å motivere Eulers formel. Her skal vi ta utgangspunkt i en annen beskrivelse av e^x og ting vi har lært om kurver for å gi en annen motivasjon. En mulig definisjon av e^x er som funksjonen $f(x)$ som tilfredsstiller differensialligningen $f' = f$ med initialbetingelse $f(0) = 1$. Fra denne definisjonen får vi umiddelbart (hvorfor) at e^{kx} er løsningen til differensialligningen $f' = kf$ med samme initialbetingelse. Legg merke til at vi så langt snakker om funksjoner $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ og $k \in \mathbf{R}$.

Hva hvis vi trekker dette et steg videre, og ser for oss at vi kan gjøre det samme med $k = i = \sqrt{-1}$. Mer presist

$$\frac{d}{dt}(e^{it}) = ie^{it} \tag{25}$$

$$e^{i0} = 1. \tag{26}$$

Vi har valgt å bruke t som (reell) variabel for å føre tankene mot parametriserte kurver, men kunne like gjerne brukt θ og x. (Det siste er kanskje ikke et like godt valg. Hvorfor?)

Vi har sett at vi kan se på komplekse tall som punkter i planet. Hvis vi skal gi mening til e^{it} bør det være som et komplekst tall, så det er ikke unaturlig å se på e^{it} som en parametetrisert kurve

$$e^{it} = x(t) + iy(t) \tag{27}$$

der $x(t)$ og $y(t)$ er parameterfunksjoner ($\mathbf{R} \to \mathbf{R}$). Hva slags kurve er dette? La oss starte med følgende observasjoner:

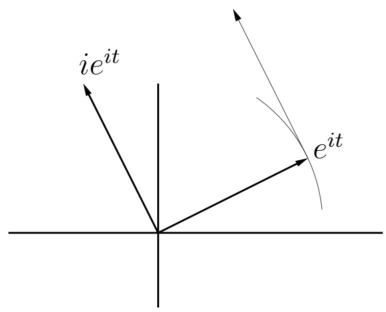
- $|ie^{it}| = |i||e^{it}| = |e^{it}|$ så hvis vi ser på de komplekse tallene e^{it} og ie^{it} som vektorer, så er de vektorer med lik lengde.

- Hvis vi ser på et komplekst tall z som en vektor vil iz, som vektor, være den samme vektoren rotert $\pi/2$. (Sjekk dette. Vi har allerde sjekket at lengden er bevart.)

- $\frac{d}{dt}(e^{it}) = x'(t) + iy'(t)$ så vi har nå funnet ut at tangenten til den parametriserte kurven er posisjonsvektoren dreid $\pi/2$, med andre ord

$$x'(t) = -y(t) \tag{28}$$

$$y'(t) = x(t) \tag{29}$$



Figur 5: Punkt og tangent på kurven

- Hvis vi bruker det vi nettopp har funnet ut, så får vi

$$x''(t) = -x(t) \tag{30}$$
$$y''(t) = -y(t) \tag{31}$$

La oss nå ta med initialbetingelsene, nemlig at $e^0 = 1 = 1 + i0$ som gir oss at vi må ha $x(0) = 1$ og $y(0) = 0$, men også $x'(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Løsningene på disse andreordens initialverdiproblemene er

$$x(t) = \cos t \tag{32}$$
$$y(t) = \sin t \tag{33}$$

(Nå har vi både svart på hva slags kurve vi får og vi har funnet Eulers formel. Sjekk at du er enig i begge disse påstandene.)

2 Differensialligninger

2.1 Bruk av Eulers formel

I MA1101 løste dere andreordens lineære homogene differensialligninger med konstante koeffisienter. Hvis vi bruker samme fremgangsmåte, men inkluderer Eulers formel i arbeidet vårt, er det kanskje lettere å huske hva resultatet skal bli.

Eksempel 14 *Løs initialverdiproblemet*

$$y'' + y' + y = 0 \tag{34}$$
$$y(0) = 3 \tag{35}$$
$$y'(0) = 0 \tag{36}$$

La oss håpe at vi er like heldige som vi var med tilsvarende førsteordens ligninger, der løsningene var på formen $y(x) = e^{rx}$. Hvis det er tilfellet må vi ha (sett inn i differensialligningen og husk at $e^{rx} \neq 0$)

$$r^2 + r + 1 = 0 \tag{37}$$

Løser vi denne ligningen får vi

$$r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{38}$$

La oss ta $r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ og se hva slags funksjon y vi får:

$$\begin{aligned}
y(x) = e^{rx} &= e^{(-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2})x} = e^{-x/2}e^{i(x\sqrt{3}/2)} \\
&= e^{-x/2}\left(\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + i\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right) \\
&= e^{-x/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + ie^{-x/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) = y_1(x) + iy_2(x)
\end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= e^{-x/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \\
y_2(x) &= e^{-x/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)
\end{aligned}$$

Du kan nå sjekke selv at både y_1 og y_2 er løsninger til differensialligninen. De er også lineært uavhengige, så vi vet at alle løsniger må være på formen

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = Ae^{-x/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + Be^{-x/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \tag{39}$$

Bruker vi initialverdiene får vi $A = 3$ og $B = \sqrt{3}$ slik at løsningen på problemet vårt blir

$$y(x) = e^{-x/2}\left(3\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \sqrt{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right) \tag{40}$$

som vi igjen kan skrive som

$$y(x) = 2\sqrt{3}e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) \tag{41}$$

Oppgave 15 *Fyll ut detaljene i og sjekk alle utregningene i eksempelet. Du finner noen av detaljene tidligere i teksten.*