NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101 Grunnkurs i Analyse 1**

Faglig kontakt under eksamen: Agamemnon Zafeiropoulos

Tlf:

Eksamensdato: 8 desember 2020

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: B: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Annen info? Hvilken annen info?

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave
Originalen er:
1-sidig ☐ **2-sidig** ☒
sort/hvit ☒ **farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☒

Dato Sign

Oppgave 1

La

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x \sin x + e^x.$$

a) Finn maclaurinpolynomet av grad tre til f.

b) Finn ligningen av tangenten til grafen av f i punktet $(\pi, f(\pi))$.

Oppgave 2 Evaluer følgende integraler.

$$\int_0^1 \arcsin^2 x \,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^2 \frac{x^2+2}{x+1}\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Oppgave 3 La

$$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{\ln x}{x} \cdot$$

Finn alle asymptotene til grafen av g. Lag en skisse av denne grafen, som viser monotonitets- og konveksitetsintervallene til g.

Oppgave 4 Løs differensialligningen

$$(1 + x^2)y' + xy = 0.$$

Hva er ordenen til denne? Er den lineær? Om den er lineær, er den homogen?

Oppgave 5

a) Evaluer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n} \; .$$

b) Er det sant at dersom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, så konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?
Begrunn svaret.

Oppgave 6 Konvergerer eller divergerer integralet

$$\int_0^\infty \frac{x\cos^2 x}{x^3+1}\mathrm{d}x?$$

Begrunn svaret.

Oppgave 7 Finn grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+k}\,.$$

Oppgave 8 La

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\begin{cases}x, & \text{om } x<0\\ 1+x^2, & \text{om } x\geq 0.\end{cases}$$

a) Benytt et ε-δ-argument for å vise at f er kontinuerlig i 1.

b) Finnes det en funksjon $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ slik at $F'(x)=f(x)$ for alle $x\in\mathbb{R}$? Begrunn svaret.

Oppgave 9

a) La $(a_n)_{n=1}^\infty$ være en følge av reelle tall som konvergerer mot 0. Vis at følgen $(a_n)_{n=1}^\infty$ er begrenset.

b) Gi et eksempel på en følge av reelle tall som er begresenset, men ikke konvergent.

Oppgave 10 La

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), & \text{om } x\neq 0\\[2ex] \dfrac{\pi^2}{4}, & \text{om } x=0\end{cases}\qquad \text{og}\qquad F(x)=\int_1^x g(u)\mathrm{d}u\,.$$

a) Finn (den maksimale) definisjonsmengden til F. Begrunn svaret.

b) Vis at F er uniformt kontinuerlig i definisjonsmengden.

c) Vis at F er inverterbar. Finn ligningen for tangenten til grafen av F^{-1} i punktet $(0,F^{-1}(0))$.

Dette er en vedleggsside.

Og dette er en til.