Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt: Heidi Dahl
Telefon: 735 98141

Løsningsforslag til midtsemesterprøve i fag MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Bokmål
Fredag 10. oktober 2008
Kl. 08.15-10.00

Hjelpemiddel: Kalkulator HP30S eller Citizen SR-270X
Alle svar skal begrunnes. Lykke til!

Sensur faller 24. oktober 2008

Oppgave 1

a) Skriv opp skviseteoremet (The Squeeze Theorem).

Løsningsforslag:

Gitt tre funskjoner f, g og h, og anta at ulikheten $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ er oppfylt for alle x i et intervall som inneholder a, muligens med unntak av for $x = a$. Anta videre at $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$. Da er også $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Merk dere følgende:

- Det er *ikke* noe krav om at funksjonene skal være *kontinuerlige*. Dersom $g(x)$ er kontinuerlig for $x = a$ har vi at $\lim_{x\to a} = g(a)$, og vi trenger ingen funksjoner å skvise den mellom for å finne grenseverdien.

- Resultatet sier *ikke* at hver gang vi har en funskjon $g(x)$ så kan vi finne to funskjoner å skvise den mellom. Eksistensen av $f(x)$ og $h(x)$ er en av forutsentingene for resultatet.

- Sjekk at notasjonen dere velger virkelig utrykker det dere ønsker å si. Ikke bruk feks. bokstaven a både som et endepunkt for et intervall hvor funskjonene skal være definert, og som den verdien x skal nærme seg i grensebetraktningen.

b) Gitt to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ som begge er definert på intervallet $[-1, 1]$. Anta at ulikheten $|f(x)| \leq g(x)$ holder for alle $x \in [-1, 1]$. Hva kan du si om grenseverdien $\lim_{x\to 0} f(x)$ dersom

(i)
$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0?$$

(ii)
$$\lim_{x\to 0} g(x) = 2?$$

Løsningsforlag:

(i): Ulikheten $|f(x)| \leq g(x)$ kan løses opp til dobbeltulikheten $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$, som vi vet gjelder for et intervall som inneholder $x = 0$ (nemlig det oppgitte intevallet $[-1, 1]$). Videre har vi at
$$\lim_{x\to 0}(-g(x)) = -\lim_{x\to 0} g(x) = -0 = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$
Dermed er alle forutsetningene for å bruke skviseteoremet på $f(x)$ oppfylt, og vi kan konkludere med at $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(ii): Igjen har vi $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$ for $x \in [-1, 1]$, men denne gang er
$$\lim_{x\to 0}(-g(x)) = -\lim_{x\to 0} g(x) = -2 \neq 2 = \lim_{x\to 0} g(x).$$
Dermed kan vi *ikke* bruke skviseteormet i denne situasjonen. Det eneste vi kan si om grensen $\lim_{x\to 0} f(x)$ er at *dersom den eksisterer* så vil den være et tall mellom -2 og 2. (Men vi kan ikke være sikre på at den eksisterer.)

Merk dere følgende:

- Les oppgaven skikkelig! Det er grenseverdien av $f(x)$ dere er bedt å si noe om, *ikke* grenseverdien av $|f(x)|$.

- Dere må argumentere i denne oppgaven, det holder ikke å bare komme med konklusjonene.

- Det oppgitte intervallet $[-1, 1]$ er et intevall på x-aksen. Når det står at $\lim_{x\to 0} g(x) = 2$, så er 2 en verdi på y-aksen, og det gjør dermed ingenting at denne er større enn 1.

Oppgave 2 Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{for } x > 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

a) Finn $f'(x)$ for $x \neq 0$ og avgjør hvor f er voksende og avtagende.

Løsningsforslag:

Ved derivasjonsregler har vi at

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{for } x > 0 \\ \frac{1}{x^2} & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Vi ser at $\frac{1}{x} > 0$ for alle $x > 0$, så funksjonen er voksende på intervallet $(0, \infty)$.

Likeledes er $\frac{1}{x^2} > 0$ for alle $x < 0$, så funksjonen er voksende også på intervallet $(-\infty, 0)$.

Merk dere følgende:

- Funksjonen er *ikke* voksende på hele $\mathbb{R}$. (Heller ikke på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.) Velger vi en negativ x-verdi nær 0 og en positiv x-verdi nær 0, vil den negative x-verdien gi høyere funskjonsverdi enn den positive.

- Funskjonen er ikke definert for $x = 0$, så det gir ikke mening å forsøke å derivere den for $x = 0$ heller.

- Det er *fortegnet* til den deriverte som forteller oss hvor (den opprinnelige) funskjonen stiger og synker. Selv om den deriverte er en avtagende funskjon, betyr det ikke at den opprinnelige funskjonen nødvendigvis er avtagende.

- Fortegnsskjema for den deriverte er flott! Men pass på at du drøfter de ulike forskriftene kun der de er gyldige, det vil si at vi bare er interessert i fortegnet til $\frac{1}{x}$ for positive x-verdier, mens vi bare er interessert i fortegnet til $\frac{1}{x^2}$ for negative x-verdier. Disse skal ikke blandes.

b) Finn alle verdier av x slik at $f(x) = 4$. Avgjør om f har en inversfunksjon.

Løsningsforslag:

For positive x har vi løsning når $\ln x = 4$, det vil si for $x = e^4$. For negative x har vi løsning når $-\frac{1}{x} = 4$, det vil si for $x = -\frac{1}{4}$.

Siden vi finner to x-verdier som gir samme y-verdi er ikke funskjonen vår en-til-en, og har følgelig ingen inversfunksjon.

Merk dere følgende:

- En funksjon som ikke er en-til-en har *aldri* en inversfunksjon. Dersom vi velger å begrense definisjonsmengden til $f(x)$, feks. ved å bare tillate positive x-verdier, så har denne begrensede funskjonen en inversfunksjon. Det samme gjelder dersom vi velger å begrense definisjonsmengden til bare negative x-verdier. Men dette er ikke det samme som å si at $f(x)$ har to inversfunksoner! Den har ingen. (Et forsøk på å sette opp to inversfunksjoner kunne kanskje sett slik ut:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} e^x \\ -\frac{1}{x} \end{cases}$$

Men for hvilke x-verdier skal den øverste forskriften gjelde, og for hvilke x-verdier skal den nederste forskriften gjelde? Hvis vi ønsker å finne $f^{-1}(4)$, hvilken forskrift skal vi velge da?)

c) Et resultat sier:

Anta at g er en deriverbar funksjon på et intervall (a, b) og at $g'(x) > 0$ for $a < x < b$. Da er g en-til-en på (a,b), og har følgelig en inversfunksjon g^{-1}.

Kommenter dette resultatet opp mot det du fant ut i oppgave a) og b).

Løsningsforlslag:

Ved første øyekast kan det se ut til at funksjonen vi har drøftet i a) og b) er et moteksempel til resultatet. I oppgave a) fant vi at $f'(x) > 0$ for alle x i definisjonsmengden, men i oppgave b) fant vi at den likevel ikke var en-til-en. Ser vi nærmere etter ser vi at resultatet krever at funskjonen skal være deriverbar i *alle* punkter i et intervall, og at resultatet bare uttaler seg om en inversfunskjon på akkurat dette intervallet. Vår funksjon har ikke en definisjonsmengde som kan skrives som ett intervall, den er ikke definert - og dermed heller ikke deriverbar - for $x = 0$. Vi kan dermed ikke bruke resultatet på (hele definisjonsmengden til) f.

Oppgave 3

a) Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at

$$\frac{d}{dx}(3x^2+8) = 6x$$

Løsningsforslag:

Definisjonen av den deriverte er gitt ved $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, dersom denne grensen eksisterer. Anvendt på vårt funksjonsutrykk gir dette

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{(3(x+h)^2+8)-(3x^2+8)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{3(x^2+2xh+h^2)+8-3x^2-8}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{6xh+3h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6x+3h) = 6x \end{aligned}$$

b) Beregn grenseverdiene

(i)

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-3x}$$

(ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

Løsningsforslag:

(i):

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-3x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-3x})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-3x}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{(x^2+x)-(x^2-3x)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{4x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-3x}}{x}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{4}{-(\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2-3x}{x^2}})} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-4}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}}} = \frac{-4}{2} = -2$$

(ii):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}[(\frac{\sin x}{x})^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}] = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Merk dere følgende:

- Vi må passe ekstra på fortegnene i (i) fordi x skal gå mot $-\infty$. Når vi dividerer på x i nevner, og velger å trekke den inn under rottegnene som x^2, så tvinger vi den til å bli positiv, mens vi i utgangspunktet var interessert i at den skulle være negativ. Vi bevarer det ønskede fortegnet ved å sette igjen et minustegn utenfor rottegnene. (At svaret blir negativt når grensen eksisterer bør være forventet om en tar seg tid til å se på hva en starter med. For negative x-verdier $(x \leq -1)$ er det som står inne i den første kvadratroten mindre enn det som står inne i den andre kvadratroten.)

- Det er stor forskjell på hva man har lov til å gjøre når man skal evaluere et utrykk (som feks. en grenseverdi) i forhold til hva man kan gjøre når man jobber med en likning. Pass på at du ikke forandrer utrykket ditt underveis! (Med mindre du er veldig bevisst på hva du endrer, og gjør de nødvendige forandringene tilbake til slutt).

c) Vis at kurven gitt ved likningen $x^3 + y^3 = xy - 1$ ikke har noen horisontale tangenter.

Løsningsforslag:

Vi har horisontale tangenter til en kurve dersom $\frac{dy}{dx} = 0$. For å finne et utrykk for $\frac{dy}{dx}$ er det naturlig å velge implisitt derivasjon (mhp. x) av likningen som beskriver kurva. Da får vi:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}(x^3 + y^3) &= \tfrac{d}{dx}(xy - 1) \\ 3x^2 + 3y^2 \cdot \tfrac{dy}{dx} &= y + x \cdot \tfrac{dy}{dx} \\ (3y^2 - x) \cdot \tfrac{dy}{dx} &= y - 3x^2 \\ \tfrac{dy}{dx} &= \tfrac{y-3x^2}{3y^2-x} \end{aligned}$$

Dermed er $\frac{dy}{dx} = 0$ bare hvis $y = 3x^2$. Det er mange punkt i planet som oppfyller dette, spørsmålet er om det er oppfylt for noen av punktene på *vår* kurve. Vi tester ved å sette inn $y = 3x^2$ i kurvelikningen $x^3 + y^3 = xy - 1$. Da får vi:

$$\begin{aligned} x^3 + (3x^2)^3 &= x(3x^2) - 1 \\ 27x^6 - 2x^3 + 1 &= 0 \\ 27(x^3)^2 - 2(x^3) + 1 &= 0 \\ x^3 &= \tfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 27}}{2 \cdot 27} \end{aligned}$$

Vi ser at likningen ikke har noen reelle løsninger, hvilket betyr at *ingen* punkt på kurva oppfyller $y = 3x^2$. Dermed kan vi konkludere med at kurva ikke har noen horisontale tangenter.