# LØSNINGER MA 1101 august 2016

Vanlige forbehold!
K.H.

## Oppgave 1

Skal vise at $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ har nøyaktig ett nullpunkt i intervallet.

Først, $f$ er kontinuerlig i $[0, \frac{\pi}{2}]$, og

$$f'(x) = -\sin x < 0 \text{ når } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}).$$

Da er $f$ strengt avtagende i $[0, \frac{\pi}{2}]$ og kan ha høyst ett nullpunkt intervallet.

Videre er $f(0) = \cos 0 - \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0 - \frac{1}{2} = \underline{-\frac{1}{2}}$, og Skjæringssetningen garanterer minst ett nullpunkt i $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Konklusjon: $f$ har nøyaktig ett nullpunkt i $[0, \frac{\pi}{2}]$.

## Oppgave 2

Skal finne $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^2}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{2x \cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos^2 x} = 1 \cdot 0 = \underline{0}$$

## Oppgave 3

Skal beregne integralene

i) $\int_0^1 \arctan 2x \, dx$ ii) $\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$.

Utregninger:

i) $$\int \underbrace{(\arctan 2x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} \, dx = x \arctan 2x - \int \frac{2x}{1+4x^2} \, dx$$

$$= x \arctan 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \arctan 2x \, dx = \underline{\arctan 2 - \frac{1}{4} \ln 5}$$

ii) $$\int_1^{e^{\pi/2}} \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx \underset{\substack{u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x}}}{=} \Big[ -\cos(\ln x) \Big]_1^{e^{\pi/2}} = -\cos(\ln e^{\pi/2}) + \cos(\ln 1)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = \underline{1}$$

## Oppgave 4

Skal løse differensiallignigene

i) $y'/x + y = 1$, $y(1) = 0$. ii) $y'y(1+x^2) - x = 0$.

i) $y'/x + y = 1 \quad (x > 0)$

$y' + xy = x$, som er linear!

Har $F(x) = x^2/2$, og integrerende faktor $e^{x^2/2}$, dvs.

$$(e^{x^2/2} y)' = x e^{x^2/2}$$

$$e^{x^2/2} y = \int x e^{x^2/2} dx = e^{x^2/2} + C$$

$$\underline{y = 1 + C e^{-x^2/2}}$$

Initialkrav $y(1) = 1 + C e^{-1/2} = \underline{0}$; $\underline{C = -e^{1/2}}$

Løsning $\underline{\underline{y = 1 - e^{(1-x^2)/2}}}$

ii) $\frac{dy}{dx} y(1+x^2) - x = 0$ er separabel.

$$\int y\, dy = \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$y^2 = \ln(1+x^2) + K \qquad (K = 2C)$$

$$y = \pm\sqrt{K + \ln(1+x^2)} \qquad (\text{Må ha } \ln(1+x^2) \geq -K)$$

## Oppgave 5

Skal finne globalt (absolutt) maksimum og globalt (absolutt) minimum av funksjonen $f(x) = x^4 - 1$ på intervallet $[-1, 2]$.

$f$ er en kontinuerlig funksjon på et lukket begrenset intervall og har derfor maks. og min. Kan inntreffe der $f'(x)$ er 0 eller i endepunktene.

$f'(x) = 4x^3 = 0$ når $x = 0$: $f(0) = \underline{-1}$

$f(-1) = (-1)^4 - 1 = \underline{0}$ , $f(2) = 2^4 - 1 = \underline{15}$

Globalt maksimum er $\underline{15}$ og globalt minimum $\underline{-1}$

Punktene er $(2, 15)$ og $(0, -1)$.

## Oppgave 6

Hvilke asymptoter har funksjonen

$$f(x) = xe^{-x} + x + 1 + \frac{1}{x} \quad ?$$

Vertikal asymptote $\underline{x = 0}$ da $\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

Skråasymptote $\underline{y = x + 1}$ ved „inspeksjon"

($x/e^x \to 0$ når $x \to \infty$, det samme gjør $1/x$).

Eller vi bruker standardmetoden fra boka:

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = 1$.

Siden $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ har ikke $f$ skråasymptote når $x \to -\infty$.

## Oppgave 7

Skal vise at $f(x) = 2\tan x - x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ har en invers funksjon $g$ og beregne $g'(0)$.

$f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 1 > 0$, så $f$ er strengt voksende og har en invers funksjon $g$. Da $f(0) = 0$ vil $g(0) = 0$, og vi har

$g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2 - 1} = \underline{\underline{1}}$

## Oppgave 8

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Vi skal vise i) $f$ deriverbar i $x=0$

ii) $\lim_{x \to 0} f'(x)$ eksisterer ikke.

i) $$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x^2} = \underline{0}$$

da $|\sin\frac{1}{x^2}| \leq 1$ slik at $|x^2 \sin\frac{1}{x^2}| \leq x^2 \to 0$ når $x \to 0$.

ii) $$f'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x^2} - x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot 2x^{-3}$$

$$= \underbrace{3x^2 \sin\frac{1}{x^2}}_{A(x)} - \underbrace{2\cos\frac{1}{x^2}}_{B(x)} \quad \text{når } x \neq 0$$

Når $x \to 0$ vil $A(x) \to 0$ som i i), mens $B(x)$ er oscillerende.
Altså eksisterer ikke $\lim f'(x)$ når $x \to 0$.

## Oppgave 9

Volumet av en kule øker med 10 cm³/s. Hvor fort øker arealet av overflaten når radien er 1cm?

Vet: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$, $\frac{dV}{dt} = 10$. $\frac{dA}{dt} = ?$ når $r=1$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 \frac{dr}{dt} = 10 \underset{r=1}{\Rightarrow} \frac{4}{3}\pi \cdot 3 \frac{dr}{dt} = 10; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{10}{4\pi}$$

$$\frac{dA}{dt} = 4\pi 2r \frac{dr}{dt} \underset{r=1}{=} 4\pi \cdot 2 \cdot \frac{10}{4\pi} = \underline{\underline{20}} \ [\text{cm}^2/\text{s}]$$

Bmk Om en ikke husker konstantene foran $r^3$ og $r^2$, vil det ikke bli mye trekk om en bruker utgangspunktet $V = ar^3$, $A = br^2$. Om tiden tillater: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ er lett å finne ved „sylinderskall" $(x^2+y^2=r^2)$, og $A = \frac{dV}{dr}$ $(A\,dr = dV)$!

## Oppgave 10

Middelverdisetningen (sekantsetningen) skal brukes til å vise at

$$(*) \quad \ln(1+x^2) \leq x^2 \quad \text{for alle } x \in (-\infty, \infty)$$

Vi observerer at (*) gjelder med „=" når $x = 0$.
Gjenstår altså å vise (*) for $t = x^2 > 0$.
I flg sekantsetningen har vi nå $(f = \ln(1+u)\,;\ 0 \leq u \leq t)$

$$\frac{\ln(1+t) - \ln(1+0)}{t-0} = \frac{1}{1+c} \quad \text{der } c \text{ et tall i } (0,t)$$

$$\boxed{\ln(1+t)} = \frac{t}{1+c} \boxed{< t}$$

Vi er framme! Ulikheten gjelder med „=" når $x = 0$, ellers med ekte ulikhetstegn.