Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse 1
Løsning

Faglig kontakt under eksamen: Kristian Seip

Tlf: 911 29 136

Eksamensdato: August 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Et formelark finnes vedlagt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Vi skal vise ved induksjon at

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Vi har $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2$ så utsagnet er sant når $n = 1$. Vi antar så at det er sant for $n = m$. Da gjelder

$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{m}(2k-1) + 2(m+1) - 1 = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2,$$

hvor vi i den andre likheten brukte induksjonshypotesen. Resultatet følger ved induksjon.

Oppgave 2 Funksjonen $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ har derivert $f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$. Vi har dermed $f'(x) = 0$ for $x = 0$ og $x = -1$. Største og minste verdi kan dermed inntreffe i punktene $-2, -1, 0, 1$. Vi regner ut $f(-2) = -5, f(-1) = 0, f(0) = -1, f(1) = 4$. Altså er største verdi 4 og minste verdi -5.

Oppgave 3 Vi bruker delvis integrasjon:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \; dx &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x \; dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \; dx \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.\end{aligned}$$

Oppgave 4 Vi skal løs intitialverdiproblemet

$$y' + y \sin x = \sin x, \quad y(0) = 0.$$

Som integrerende faktor velger vi $e^{-\cos x}$, slik at vi får generell løsning

$$y = e^{\cos x} \int e^{-\cos x} \sin x \; dx = 1 + Ce^{\cos x}.$$

Siden $y(0) = 0$, får vi $C = -e^{-1}$ og dermed

$$y = 1 - e^{\cos x - 1}.$$

Oppgave 5 Vi betrakter y som en funksjon av x og deriverer ligningen

$$x^3y^2 - x^2y^3 = 4$$

implisitt. Det gir

$$3x^2y^2 + x^3 2yy' - 2xy^3 - x^2 3y^2y' = 0.$$

Løser vi denne ligningen med hensyn på y', får vi

$$y' = \frac{3xy - 2y^2}{3xy - 2x^2}$$

og dermed $y' = -2$ i $(2, 1)$. Tangenten i dette punktet har derfor ligning

$$y = -2(x - 2) + 1 \quad \text{som kan skrives som} \quad 2x + y = 5.$$

Oppgave 6 Vi delbrøkoppspalter

$$\frac{2x^2}{(x^2+4)(x+2)} = \frac{A + Bx}{x^2+4} + \frac{C}{x+2}.$$

Setter vi på felles brøkstrek, får vi dermed ligningssystemet $B+C = 2$, $A+2B = 0$, $2A + 4C = 0$ som har løsning $A = -2$, $B = 1$, $C = 1$. Dermed får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2dx}{(x^2+4)(x+2)} &= -2\int \frac{dx}{x^2+4} + \int \frac{xdx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x+2} \\ &= -\arctan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

Oppgave 7 Funksjonen $\arcsin x$ er definert på intervallet $[-1, 1]$ og er her en kontinuerlig funksjon. Siden $|\sin x| \leq 1$ for alle x, er dermed integranden veldefinert og kontinuerlig på intervallet mellom 0 og $\sin x$. Dette sikrer at

$$f(x) = \int_0^{\sin x} e^{\arcsin t} dt$$

er veldefinert for alle x. For $-\pi \leq x \leq \pi$ gjelder $\arcsin(\sin x) = x$. Bruker vi analysens fundementalteorem, får vi derfor

$$f'(x) = \cos x e^{\arcsin(\sin x)} = e^x \cos x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Oppgave 8 Vi antar at f er en kontinuerlig funksjon på intervallet $[a, b]$ og at f er deriverbar på (a, b). Hvis f er konstant lik C, får vi

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

for alle x i (a, b). På den annen side: Siden sekantsetningen sier at

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

for en c i intervallet (a, x) for alle x i $(a, b]$, vil $f'(c)$ for alle c i (a, b) gi $f(x) = f(a)$ for alle x i $(a, b]$.

Oppgave 9 Vi lar a være et reelt tall og betrakter funksjonen

$$g_a(x) = \begin{cases} x|x|^a, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Vi har

$$\lim_{x\to 0^+} g_a(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{1+a} = \begin{cases} +\infty, & a < -1 \\ 1, & a = -1 \\ 0, & a > -1. \end{cases}$$

Tilsvarende har vi $\lim_{x\to 0^{-1}} g_a(x) = 0$ for $a > -1$. Funksjonen g_a er derfor kontinuerlig i $x = 0$ hvis og bare hvis $a > -1$.

b) Vi finner at

$$\lim_{x\to 0} \frac{g_a(x) - g_a(0)}{x} = \lim_{x\to 0} |x|^a = \begin{cases} +\infty, & a < 0 \\ 1, & a = 0 \\ 0, & a > 0. \end{cases}$$

Funksjonen g_a er derfor deriverbar i $x = 0$ hvis og bare hvis $a \geq 0$.