Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag, eksamen MA1101/MA6101 07.12.09

Oppgave 1 La $f(x) = e^{x^4-2x^2} - 8$.

a) Finn alle ekstremalpunktene til funksjonen f.

Løsningsforslag: Vi kan ha ekstremalpunkt i *kritiske punkt* (der $f'(x) = 0$), i *singulære punkt* (der $f'(x)$ ikke eksisterer) og i *endepunkt* av definisjonsmengden. Her er bare kritiske punkt aktuelt.

Bruker kjerneregelen for derivasjon og finner

$$f'(x) = e^{x^4-2x^2}(4x^3 - 4x) = 4x(x^2-1)e^{x^4-2x^2} = 4x(x-1)(x+1)e^{x^4-2x^2}$$

Eksponentialfunksjonen blir aldri null, så vi ser at $f'(x) = 0$ for $x = 0$, $x = 1$ og for $x = -1$. Dette er kritiske punkt, og dermed *kandidater* til ekstremalpunkt. Vi må sjekke at den deriverte skifter fortegn for å kunne konkludere med at de virkelig er ekstremalpunkt. Tegner derfor fortegnsskjema for $f'(x)$. Da finner vi i samme slengen ut om de er topp- eller bunnpunkt.

		-1		0		1	
x	- - -	- - -	- - -	0	———	———	———
$x-1$	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	0	———
$x+1$	- - -	0	———	———	———	———	———
$e^{x^4-2x^2}$	———	———	———	———	———	———	———
$f'(x)$	- - -	0	———	0	- - -	0	———
f:	↘		↗		↘		↗

Konklusjon: Vi har (lokalt) toppunkt i $(0, f(0)) = (0, -7)$ og (lokale og globale) bunnpunkt i $(-1, f(-1)) = (-1, e^{-1} - 8)$ og $(1, f(1)) = (1, e^{-1} - 8)$.

Kommentar: Det var ikke nødvendig å klassifisere punktene som (lokale/globale) topp- eller bunnpunkt her. Men siden vi er nødt til å vise at den deriverte skifter fortegn for å være sikre på at vi virkelig har ekstremalpunkt i de kritike punktene vi har funnet, koster det lite ekstra å avgjøre om de er topp- eller bunnpunkt.

b) Vis at f har et nullpunkt på intervallet $[0,2]$.

Løsningsforslag: Vi har at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon på hele $\mathbb{R}$, og da spesielt på intervallet $[0,2]$. Videre er $f(0) = -7 < 0$ og $f(2) = e^8 - 8 > 0$. Da gir mellomverdisetningen (skjæringssetningen) (med $s = 0$) at det finnes (minst) et punkt $c \in [0,2]$ slik at $f(c) = 0$.

Kommentar: Her er det nødvendig å si at funksjonen er *kontinuerlig* på det aktuelle intervallet. Det er ikke tilstrekkelig å vise at funksjonen er negativ i det ene endepunktet og positiv i det andre endepunktet. Tenk på funksjonen g definert på hele $\mathbb{R}$ ved $g(x) = -1$ for $x \leq 0$ og $g(x) = 1$ for $x > 0$. Da er g negativ for $x = 0$ og positiv for $x = 2$, men funksjonen har ikke noe nullpunkt. Det forventes også at resultatet som benyttes navngis her, siden det er et av de mer sentrale i kurset.

Oppgave 2 Beregn grenseverdiene

(i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-\sin x}}{x}$$

Løsningsforslag:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{1-\sin x})(1+\sqrt{1-\sin c})}{x(1+\sqrt{1-\sin x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(1+\sqrt{1-\sin x})} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{1+\sqrt{1-\sin x}} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Her er det benyttet den kjente grenseverdien $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Kommentar: Dette er et "null over null"-utrykk, så man kan også benytte L'Hopitals regel her. Pass på fortegn under derivasjon!

(ii)
$$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{3}{x})^x$$

Løsningsforslag: Vi har et utrykk på formen $[1^\infty]$, som er ubestemt. Siden eksponentialfunksjonen er kontinuerlig, og $(1+\frac{3}{x})^x = e^{\ln(1+\frac{3}{x})^x}$, velger vi å se på grenseverdien av eksponenten:

$$\lim_{x\to\infty} \ln(1+\frac{3}{x})^x = \lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{3}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{3}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{3}{x}}(\frac{-3}{x^2})}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1+\frac{3}{x}} = 3$$

Dermed har vi

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x = e^3$$

Her har vi først skrevet om utrykket slik at vi fikk et "null over null"-utrykk, og så er L'hopitals regel benyttet.

Kommentar: Selv om $(1+\frac{3}{x})$ går mot 1 når x går mot uendelig, vil ikke grenseverdien (nødvendigvis) bli 1. Utrykket inne i parantsen *blir* aldri *lik* 1, det bare nærmer seg 1. Så når eksponenten samtidig nærmer seg uendelig, har vi et ubestemt utrykk.

Det er mulig å skrive om utrykket slik at man kan benytte den kjente(?) grenseverdien $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$, men da må man være trygg på at omskrivningen man gjør er gyldig.

Oppgave 3 Området over grafen til funksjonen $f(x) = x^2$ og under linja $y = 1$, for $0 \leq x \leq 1$, roteres om y-aksen. Finn volum og overflateareal av legemet som fremkommer. (Oppgitt: $ds = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.)

Løsningsforslag: Her er det nyttig med en figur. Volumet kan beregnes ved skivemetoden. Da deles området inn i tynne sirkulære skiver, stablet over hverandre i y-retning. Volumet at en skive er $dV = \pi r(y)^2\,dy$ (areal ganger tykkelse). Radien er gitt ved avstand fra y-aksen til grafen $y = x^2$, det vil si $r = x = \sqrt{y}$. Vi integrerer over alle y-verdier for figuren.

$$V = \int_{y=0}^{1} dV = \pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2\,dy = \pi\int_0^1 y\,dy = \pi[\frac{1}{2}y^2]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Overflaten kan beregnes ved å dele inn i tynne sirkulære bånd rundt y-aksen. Et bånd vil da bidra til overflaten med omkrets ganger bredde, det vil si $dS = 2\pi r\,ds$, der $ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ er buelengdedifferensialet (bredden). Her har vi $f'(x) = 2x$, så $ds = \sqrt{1+4x^2}\,dx$. Radien er fortsatt avstand fra y-akse til grafen. Siden vi denne gang skal integrere med hensyn på x utrykker vi radien ved hjelp av x, og da har vi ganske enkelt $r = x$. Dermed får vi

$$S = 2\pi\int_{x=0}^{1} x\sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\pi\int_{x=0}^{1}\frac{1}{8}u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{\pi}{4}[\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

I tilegg vil rotasjonslegemet ha en toppflate med areal π, siden toppradien er 1.

Konklusjonen er at volumet er $V = \frac{\pi}{2}$ volumenheter, mens overflaten har areal $S = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)+\pi$ flateenheter.

Kommentar: Volumet kan beregnes like lett ved hjelp av sylinderskallmetoden. Da kan et delvolum utrykkes $dV = 2\pi r(x)h(x)\,dx$ (omkrets ganger høyde ganger tykkelse), og vi har $r(x) = x$ og $h(x) = 1 - f(x) = 1 - x^2$. Merk at høyden *ikke* er fra x-aksen og opp til grafen, men fra grafen og opp til linja $y = 1$.

For overflaten er det ikke trukket dersom man velger å se bort i fra toppflaten.

Oppgave 4

a) Finn den løsningen av differensiallikningen

$$y' = 2xy$$

som går gjennom punktet $(0, 1)$.

Løsningsforslag: Dette er en differensiallikning av første orden som er både separabel og lineær. Velger å løse ved å separere variable.

$$\begin{aligned}
y' &= 2xy \\
\tfrac{1}{y}y' &= 2x \\
\int \tfrac{1}{y}\,dy &= \int 2x\,dx \\
\ln|y| &= x^2 + C_1 \\
|y| &= e^{x^2+C_1} = C_2 e^{x^2} \\
y &= \pm C_2 e^{x^2} = C_3 e^{x^2}
\end{aligned}$$

Vi merker oss at konstanten C_2 bare kan ha positive verdier, mens konstanten C_3 kan ha både positive og negative verdier. Siden $y = 0$ er en opplagt løsning av differensiallikningen, blir den generelle løsniningen $y = Ce^{x^2}$, for alle verdier av C.

Vi er imidlertid bare på jakt etter den løsningen som passerer punktet $(0, 1)$. Setter vi $x = 0$ og $y = 1$ inn i løsningen, finner vi $1 = Ce^0 = C$, altså er den spesielle løsningen $y = e^{x^2}$.

Kommentar: Som sagt kan denne differensiallikningen også betraktes som lineær (flytter vi over får vi $y' - 2xy = 0$), og løses ved hjelp av integrerende faktor. Den integrerende faktoren blir her $e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$. Pass på fortegn!

b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 2y' + y = x^2$$

Løsningsforslag: Dette er en inhomogen lineær, annenordens differensiallikning med konstante koeffisienter. Den generelle løsningen er gitt ved $y = y_h + y_p$, der y_h er den generelle løsningen av den tilhørende homogene likningen $y'' + 2y' + y = 0$, mens y_p er en partikulærløsning av den oppgitte likningen.

Vi starter med å finne y_h: Den karakterisitiske likningen $r^2 + 2r + 1 = 0$ har løsningen $r = -1$ (dobbeltrot). Dermed er $y_h = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.

Siden høyresiden i differensiallikningen er et annengradspolynom, antar vi at partikulærløsningen også er et annengradspolynom, og setter $y_p = ax^2 + bx + c$. Da blir $y_p' = 2ax + b$ og $y_p'' = 2a$. Setter inn i likningen for å bestemme a, b og c (om mulig).

$$\begin{aligned} 2a + 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) &= x^2 \\ ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c) &= x^2 \end{aligned}$$

Skal dette holde for alle x må vi ha samme koeffisient foran ledd av samme grad på begge sider av likhetstegnet, altså må vi ha $a = 1$, $4a + b = 0$ og $2a + 2b + c = 0$, som har løsning $a = 1$, $b = -4$ og $c = 6$. Dermed er $y_p = x^2 - 4x + 6$. Den generelle løsningen blir $y = y_h + y_p = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + x^2 - 4x + 6$.

Oppgave 5 Løs de ubestemte integralene

a)

$$\int 2x \arctan x \, dx$$

Løsningsforslag: Benytter delvisintegrasjon, etterfulgt av polynomdivisjon/triksing med brøkutrykket som oppstår:

$$\begin{aligned} \int 2x \arctan x \, dx &= x^2 \arctan x - \int \tfrac{x^2}{x^2+1} \, dx \\ &= x^2 \arctan x - \int 1 - \tfrac{1}{x^2+1} \, dx \\ &= x^2 \arctan x - x + \arctan x + C \end{aligned}$$

Kommentar: En del forsøker delvis integrasjon også på brøkfunksjonen. Delvis integrasjon to ganger er ofte en god ide, men det er sjelden en god ide å bytte rollene til de to funksjonene når man gjennomførerer den andre delvise integrasjonen.

b)

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$$

Løsningsforslag: Velger substitusjonen $x = 5\sin\theta$, som gir $dx = 5\cos\theta\,d\theta$ og nevneren i integranden blir $\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-25\sin^2\theta} = 5\sqrt{1-\sin^2\theta} = 5\cos\theta$. Dermed:

$$\begin{aligned}\int \tfrac{x^3}{\sqrt{25-x^2}}\,dx &= \int \tfrac{5^3\sin^3\theta}{5\cos\theta} 5\cos\theta\,d\theta = 5^3\int \sin^3\theta\,d\theta = 5^3\int(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta \\ &= 5^3(-\cos\theta + \tfrac{1}{3}\cos^3\theta) + C\end{aligned}$$

Vi må substituerere oss tilbake fra θ til x. Vi har $5\sin\theta = x$. Lager vi en rettvinklet trekant med en av de ikke-rette vinklene lik θ, hypotenus lik 5 og den motstående kateten til θ lik x (slik at $\sin\theta = \frac{x}{5}$), vil den hosliggende kateten ha lengde $\sqrt{25-x^2}$, og dermed er $\cos\theta = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$. Dermed blir integralet lik

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{25-x^2}}\,dx = -5^2\sqrt{25-x^2} + \frac{1}{3}(25-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Kommentar: Integralet lar seg også løse ved delvis integrasjon, hvis vi skriver om integranden til et produkt $\frac{x^3}{\sqrt{25-x^2}} = x^2\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ og velger å integrere den bakre faktoren ved hjelp av substitusjonen $u = 25-x^2$.

Oppgave 6 La T være en rettvinklet trekant med grunnlinje 4 og høyde 3. Et rektangel skal innskrives i trekanten T på en slik måte at to av sidene i rektangelet ligger langs henholdsvis trekantens grunnlinje og trekantens høyde. Hva er det største arealet et slikt rektangel kan ha?

Løsningsforslag: Det er en god ide med en figur her. Tar utgangspunkt i en rettvinklet trekant med rett vinkel i venstre hjørne. Kaller lengden av den siden i rektangelet som ligger langs trekantens grunnlinje for x, og lengden av den siden i rektangelet som ligger langs trekantens høyde for y. Da er arealet til rektangelet gitt ved $A = xy$. Vi har flere formlike trekanter i figuren, så vi kan bruke forholdsregninging til å finne en sammenheng mellom x og y. Ser på høyde og grunnlinje den lille trekanten lengst til høyre sammenliknet med tilsvarende sider i hele trekanten, og finner da $\frac{y}{4-x} = \frac{3}{4}$, som gir $y = \frac{3}{4}(4-x)$. Dermed kan vi utrykke arealet som en funksjon av x ved $A(x) = \frac{3}{4}(4x - x^2)$, for $0 \le x \le 4$. Deriverer og setter lik 0 for å finne kritiske punkt: $A'(x) = \frac{3}{4}(4-2x)$, som er 0 for $x = 2$. Den dobbelterderivete $A''(x) = -\frac{3}{2} < 0$, så ved annenderiverttesten er $x = 2$ et toppunkt for funksjonen. Maksimalverdien av arealet blir dermed $A(2) = \frac{3}{4}(8-4) = 3$ kvadratenheter.

Kommentar: Arealfunksjonen kan finnes på mange måter, det er en fin fremgangsmåte å plassere trekanten i et koordinatsystem og finne likningen for hypotenusen. I alle tilfeller skal det begrunnes at det kritiske punktet for arealfunksjonen virkelig er et toppunkt.

Dersom man finner maksimalarealet på andre måter enn ved å maksimere en arealfunksjon, må man passe på å begrunne fremgangsmåten/tankemåten skikkelig, det gir ingen uttelling å bare komme med rett svar!

Oppgave 7 La f og g være to funksjoner som er kontinuerlige på det lukkede intervallet $[a, b]$ og deriverbare på det åpne intervallet (a, b). Anta at $f(a) = g(a)$ og $f(b) = g(b)$. Vis at det finnes (minst) et tall $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = g'(c)$.
Illustrer resultatet med en figur!

Løsningsforslag: Definerer funskjonen $h(x) = f(x) - g(x)$. Da er h kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b), med derivert $h'(x) = f'(x) - g'(x)$. Forutsetningene for å bruke sekantsetningen på $h(x)$ på intervallet $[a, b]$ er dermed i orden, og resultatet i sekantsetningen gir

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = h'(c),$$

der $c \in (a, b)$. Men vi har $h(b) = f(b) - g(b) = 0$ og $h(a) = f(a) - g(a) = 0$ (siden $f(b) = g(b)$ og $f(a) = g(a)$), så venstresiden i sekantsetningsresultatet er 0. Dermed gir sekantsetningen oss et punkt $c \in (a, b)$ hvor $0 = h'(c) = f'(c) - g'(c)$, som gir $f'(c) = g'(c)$, som skulle vises.

På figur gir resultatet at hvis to funskjoner både starter og slutter i samme punkt, så må det finnes et punkt i mellom hvor de to funskjonene har parallelle tangenter.

Kommentar: Mange bruker sekantsetningen på både $f-$ og $g-$funksjonen her, og setter opp

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c_1)$$

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c_2)$$

Her er venstresidene like siden $f(a) = g(a)$ og $f(b) = g(b)$, men vi har ingen garanti for at det er *samme* c-verdi som opptrer på høyresidene. De fleste figurer vil vise at det som regel *ikke* kan være snakk om samme c-verdi.