Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag til eksamen i fag MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I

Høst 2008

Oppgave 1 Funksjonen g er definert ved $g(x) = x^6 - 3x^2 + 1$.

a) Finn alle lokale og globale maksimum- og minimumspunkt for g.

Løsningsforslag:

Ekstramalpunkt kan vi ha ved

(i) randpunkt,

(ii) kritiske punkt, dvs der den deriverte er null, eller ved

(iii) singulære punkt, dvs der den deriverte ikke eksisterer.

Siden $g(x)$ er en polynomfunksjon eksisterer den overalt, og den deriverte eksisterer også overalt. Vi har derfor verken randpunkt eller singulære punkt. Alle ekstremalpunkt finnes derfor der $g'(x) = 0$.

Vi har $g'(x) = 6x^5 - 6x = 6x(x^4 - 1) = 6x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 6x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$, som er lik null hvis og bare hvis $\underline{x = 0}$, $\underline{x = 1}$ eller $\underline{x = -1}$.

For å avgjøre om dette gir maksimums- eller minimumspunkt (eller ingen av delene, som jo også kan være tilfelle!) kan vi tegne et fortegnskjema for den deriverte: (Alternativt kan vi benytte annenderiverttesten.)

		-1		0		1	
$6x$	- - - -	- -	- - - -	0	——	——	——
$x-1$	- - - -	- -	- - - -	- -	- - - -	0	——
$x+1$	- - - -	0	——	——	——	——	——
x^2+1	——	——	——	——	——	——	——
$g'(x)$	- - - -	0	——	0	- - - -	0	——
g:							

Vi ser at $(0, g(0)) = (0, 1)$ er et maksimalpunkt, mens $(-1, g(-1)) = (-1, -1)$ og $(1, g(1)) = (1, -1)$ er minimalpunkt.

Siden $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \infty$, har funksjonen ingen globale maksimalpunkt, og vi kan konkludere med at $g(x)$ har lokalt maksimalpunkt i $(0, 1)$ og globale (og lokale) minimalpunkt i $(-1, -1)$ og $(1, -1)$.

Kommentar: Oppgaven er en standardoppgave. De fleste finner de riktige kritiske punktene, men endel gir ingen begrunnelse for hvordan vi med sikkerhet kan fastslå at vi får toppunkt i $(0, 1)$ og bunnpunkt i $(-1, -1)/(1, -1)$.

b) Skriv opp mellomverdisetningen (også ofte kalt skjæringssetningen eller The Intermediate-Value Theorem). Bevis kreves ikke.

Løsningsforslag: La f være en kontinuerlig funksjon på intervallet $[a, b]$. Dersom s er et tall som ligger mellom $f(a)$ og $f(b)$ (altså enten $f(a) \leq s \leq f(b)$ eller $f(b) \leq s \leq f(a)$), så finnes (minst) et(t) punkt $c \in [a, b]$ slik at $f(c) = s$.

Kommentar: Her var det stor usikkerhet! En del skriver opp (mer eller mindre perfekt) sekantsetningen, men det gir dessverre ingen uttelling. En del skriver opp spesialtilfellet om når f må krysse x-aksen (kalles Rolles teorem), eller forsøker seg på en fikspunktformulering med $f(c) = c$. De fleste formuleringene er veldig uklare med hensyn til hva som er forutsetninger og hva som er resultat, og med hensyn til hvor de ulike tallene s og c skal ligge. I mellomverdisetningen er det to forutsetninger: funksjonen vår f må være *kontinuerlig* på $[a, b]$, og vi må ha *gitt et tall s som ligger mellom $f(a)$ og $f(b)$*. Da er resultatet i mellomverdisetningen at det *finnes en x-verdi $c \in [a, b]$ som gir funksjonsverdi $f(c) = s$*. På en illustrasjon betyr dette at grafen til f må skjære linja $y = s$ på sin vei fra $f(a)$ til $f(b)$. En del gir en god illustrasjon.

c) Vis at likningen $x^6 - 3x^2 + 1 = 0$ har nøyaktig to løsninger på intervallet $[-1, 1]$.

Løsningsforslag: Vi ser at å vise at likningen har nøyaktig to løsninger på intervallet $[-1, 1]$ er det samme som å vise at funksjonen $g(x)$ gitt i a) har nøyaktig to nullpunkt på det samme intervallet.

Siden g er en polynomfunksjon er den kontinuerlig overalt. Fra a) vet vi også at $g(-1) = -1$, $g(0) = 1$ og $g(1) = -1$. Bruker vi først mellomverdisetningen på g på intervallene $[-1, 0]$, og velger $s = 0$, har vi da $g(-1) < 0 < g(0)$, så det finnes minst ett punkt $c_1 \in [-1, 0]$ slik at $g(c_1) = 0$. Siden $g'(x) \geq 0$ på hele dette intervallet (grafen stiger), kan vi ikke ha fler enn ett nullpunkt på intervallet $[-1, 0]$. Tilsvarende på intervallet $[0, 1]$; Her er $g(1) < 0 < g(0)$, så i følge mellomverdisetningen finnes det minst ett punkt $c_2 \in [0, 1]$ slik at $g(c_2) = 0$. Siden

$g'(x) \leq 0$ på dette intervallet (grafen synker), har vi maksimalt ett. (Merk også at $g(0) \neq 0$, så $c_1 \neq c_2$.)

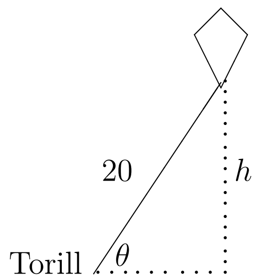
Vi konkluderer med at likningen har *nøyaktig* to nullpunkt på intervallet $[-1, 1]$.

Kommentar: Mange viser at det finnes minst to nullpunkt, men gir ikke noe argument for hvordan vi kan være sikre på at det ikke finnes flere.

Oppgave 2 Torill er ute og flyr med dragen sin. Dragen er festet i enden av en 20 meter lang snor. Et vindkast griper fatt i dragen og blåser den slik at vinkelen mellom snora og horisontalplanet øker med en hastighet på $\frac{1}{40}$ radianer pr. sekund. Hvor fort øker dragens høyde over bakken i det øyeblikket vinkelen er $\frac{\pi}{3}$? Vi antar at Torill står helt i ro og at snora som dragen er festet i er stram til enhver tid.

Løsningsforslag:

Vi starter med å tegne en figur av situasjonen:



Vi har fått opplyst at endringen pr.tidsenhet for vinkelen θ er $\frac{1}{40}$ radianer pr. sekund, dvs $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{40}$. Vi skal finne endringen pr. tidsenhet i høyden h, dvs vi skal finne $\frac{dh}{dt}$, i det vinkelen θ er $\frac{\pi}{3}$.

Her er stategien å finne en generell (dvs. tidsuavhenig) sammeheng mellom det vi vet endringen i (vinkelen θ) og det vi skal finne endringen i (høyden h), for så å (tids)derivere sammenhengen, og til slutt sette inn de spesielle opplysningene som gjelder i akkurat det tidspunktet vi er interessert i.

Fra figuren ser vi at $\sin\theta = \frac{h}{20}$, eller ekvivalent; $h = 20\sin\theta$. Derivasjon av begge sider mhp. tid (NB! Husk kjerneregelen på høyresiden!) gir $h'(t) = 20\cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$. Vi setter inn $\theta = \frac{\pi}{3}$ og $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{40}$ og finner $h'(t) = 20\cos\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{40} = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{4}$. Dermed er konklusjonen at høyden øker med $\frac{1}{4}$ meter pr. sekund i det aktuelle tidspunktet.

Kommentar: Dette er en oppgave mange får til perfekt. En del får til å sette opp sammenhengen mellom vinkelen θ og høyden h, men ser ikke hvordan de kan bruke denne til å finne en sammenheng mellom endringsratene $\frac{d\theta}{dt}$ og $\frac{dh}{dt}$.

Oppgave 3

a) Løs det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^2+3x}{(x^2+4x+5)(x+1)}\,dx.$$

Løsningsforslag: Observerer at telleren er av lavere grad enn nevneren (trenger ingen polynomdivisjon) og at nevneren er fullstendig faktorisert. Vi gyver derfor løs med delbrøkoppspalting for å få integralet på en lettere form.

Bestemmer konstantene A, B og C slik at

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5} = \frac{x^2+3x}{(x^2+4x+5)(x+1)}$$

Multipliserer med fellesnevner:

$$A(x^2+4x+5) + (Bx+C)(x+1) = x^2+3x$$

Rydder på venstresiden ved å samle ledd av samme grad:

$$(A+B)x^2 + (4A+B+C)x + (5A+C) = x^2+3x$$

Skal dette holde for alle x, må vi ha samme koeffisient foran ledd av lik grad på begge sider, altså må

$$\begin{array}{rlrlrl}
A+B & =1 & 4A+B+C & =3 & 5A+C & =0 \\
B & =1-A & & & C & =-5A \\
 & & 4A+1-A-5A & =3 & & \\
 & & -2A & =2 & & \\
 & & \underline{A} & \underline{=-1} & & \\
\underline{B} & \underline{=2} & & & \underline{C} & \underline{=5}
\end{array}$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+3x}{(x^2+4x+5)(x+1)}\,dx &= \int \frac{-1}{x+1} + \frac{2x+5}{x^2+4x+5}\,dx \\
&= -\ln|x+1| + \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} + \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx \\
&= -\ln|x+1| + \ln(x^2+4x+5) + \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx \\
&= -\ln|x+1| + \ln(x^2+4x+5) + \arctan(x+2) + C
\end{aligned}$$

Legg merke til omskrivingen/oppdelingen av integralet i linje to, hvor vi får ett integral hvor teller er nøyaktig den deriverte av nevner, og ett integral med et konstantledd i teller. Legg også merke til omskrivingen av nevner i integralet i linje tre.

Det er brukt ulike substitusjoner for å komme i mål med de ulike integralene; $u_1 = x + 1$ (gir $du_1 = dx$), $u_2 = x^2 + 4x + 5$ (gir $du_2 = 2x + 4\,dx$) og $u_3 = x + 2$ (gir $du_3 = dx$).

Kommentar: En (litt vanskelig?) standardoppgave. Flere imponerer på denne oppgaven ved å gå kreative omveier, for så å komme seg galant i mål likevel. Men en god del kommer også uheldig ut ved å prøve å delbrøkoppspalte integranden ved å velge $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2+4x+5}$, altså bare konstantledd i teller i begge ledd. At dette fører til en selvmotsigelse når man skal forsøke å bestemme A og B er det skuffende få som kommentere eller kanskje i det hele tatt registrerer?

b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{x+3}{(x^2+4x+5)(x+1)}.$$

Løsningsforslag: Differensiallikningen er på formen $y' + p(x)y = q(x)$, med $p(x) = \frac{1}{x}$ og $q(x) = \frac{x+3}{(x^2+4x+5)(x+1)}$. Den løses enklest ved hjelp av integrerende faktor $e^{\int p(x)\,dx}$, der $\int p(x)\,dx$ er en vilkårlig antiderivert til $p(x)$. Her har vi $\int p(x)\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x|(+C)$, så vi får integrerende faktor $e^{\ln|x|} = |x|$.

Mulitpliserer begge sider av differensiallikningen med integrerende faktor (vi kan nå droppe absoluttverditegnet) :

$$xy' + y = \frac{x^2+3x}{(x^2+4x+5)(x+1)}.$$

Gjennkjenner venstresiden som den deriverte (mhp. x) til et produkt:

$$(xy)' = \frac{x^2+3x}{(x^2+4x+5)(x+1)}.$$

Integrerer begge sider mhp. x (og bruker resultatet fra a)):

$$xy = \int \frac{x^2+3x}{(x^2+4x+5)(x+1)}\ dx = -\ln|x+1| + \ln(x^2+4x+5) + \arctan(x+2) + C.$$

Løser til slutt for y:

$$y = \frac{-\ln|x+1| + \ln(x^2+4x+5) + \arctan(x+2) + C}{x}.$$

Kommentar: Generelt godt løst, de fleste behersker denne teknikken. Følgefeil fra a) trekker selvsagt ikke i denne oppgaven.

c) Finn alle løsninger av differensiallikningen

$$y'' - 5y' + 6y = 12x.$$

Finn så den løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene $y(0) = \frac{5}{3}$ og $y'(0) = 0$.

Løsningsforslag: Dette er en inhomogen, annenordens differensiallikning med konstante koeffisienter. Den generelle løsningen er på formen $y = y_h + y_p$ der y_h er den generelle løsningen av den tilsvarende homogene likningen, mens y_p er en (vilkårlig) partikulærløsning.

Vi finner y_h først, ved å løse $y'' - 5y' + 6y = 0$. Ved å anta en løsning på formen e^{rx} finner man ut at r må tilfredsstille den karakteristiske likningen $r^2 - 5r + 6 = 0$, som har løsningene $r = 2$ og $r = 3$. Dermed er $y_h = Ce^{2x} + De^{3x}$.

Siden høyresiden i differensiallikningen vår er et førstegradspolynom, forsøker vi å finne en partikulærløsning på fomen $y_p = Ax + B$ som tilfredsstiller likningen. Vi derivere og dobbeltderivere y_p og setter inn i likningen for å bestemme A og B:

Vi har $y_p = Ax + B$, $y_p' = A$ og $y_p'' = 0$.

Innsatt i differensiallikningen får vi da $0 - 5A + 6(Ax + B) = 6Ax + (6B - 5A) = 12x$, så vi må ha $6A = 12$ og $6B - 5A = 0$, altså må vi ha $A = 2$ og $B = \frac{5}{3}$.

Den generelle løsningen er derfor $\underline{y = Ce^{2x} + De^{3x} + 2x + \frac{5}{3}}$.

Til slutt finner vi den løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene $y(0) = \frac{5}{3}$ og $y'(0) = 0$:

$y(0) = C + D + \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ gir $C + D = 0$, eller ekvivalent $C = -D$.

Videre er $y'(x) = 2Ce^{2x} + 3De^{3x} + 2$, så $y'(0) = 2C + 3D + 2 = 0$, og bruker vi nå at $C = -D$ får vi $-2D + 3D + 2 = 0$ som gir $D = -2$ og dermed er $C = 2$.

Løsnignen av initialverdiproblemet er dermed $\underline{y = 2e^{2x} - 2e^{3x} + 2x + \frac{5}{3}}$.

Kommentar: Det er unødvendig å tape poeng på å ikke løse den karakteristiske likningen riktig! Ellers er det en del som ikke vet hvordan de skal håndtere at likningen er inhomogen, og en del overser(?) initialverdibetingelsene. Kan man teknikken er dette en uproblematisk rett-frem-oppgave.

Oppgave 4 Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{2}x} + A & \text{for } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{8x+1}-1}{x} & \text{for } -\frac{1}{8} \leq x < 0 \\[2ex] \dfrac{\int_0^{8x+1} e^{t^2}\,dt}{B(x+\frac{1}{8})} & \text{for } x < -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

a) Bestem A og B slik at f blir en kontinuerlig funksjon på hele $\mathbb{R}$.

Løsningsforslag: For at en funksjon skal være kontinuerlig i et punkt, må grensen fra både høyre og venstresiden inn mot punktet være lik funksjonsverdien i punktet. For denne funskjonen er det to punkt vi må analysere spesielt, nemlig for $x = 0$ og for $x = -\frac{1}{8}$. For alle andre verdier av x er funksjonen automatisk kontinuerlig.

Tar for oss $x = 0$ først:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = A$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{8x+1}-1}{x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{8}{2\sqrt{8x+1}} - 0}{1} = 4$$

Dermed må vi kreve $\underline{A = 4}$ for å få kontinuitet for $x = 0$.

For $x = -\frac{1}{8}$ har vi:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{8}^+} f(x) = f(-\frac{1}{8}) = \frac{\sqrt{8 \cdot (-\frac{1}{8}) + 1} - 1}{-\frac{1}{8}} = 8$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{8}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{8}^-} \frac{\int_0^{8x+1} e^{t^2}\,dt}{B(x+\frac{1}{8})} \overset{[\frac{0}{0}]*}{=} \lim_{x \to -\frac{1}{8}^-} \frac{e^{(8x+1)^2} \cdot 8}{B} = \frac{8}{B}$$

Dermed må vi kreve $\underline{B = 1}$ for å få kontinuietet for $x = -\frac{1}{8}$.

(Ved $[\frac{0}{0}]$ er det benyttet L'Hopitals regel (kunne alternativt utvidet vha konjugatsetningen), og ved $[\frac{0}{0}]*$ er det i tillegg til L'Hopitals regel benyttet følgende variant av fundamentalteoremet: $\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x)) \cdot g'(x)$.)

Kommentar: Mange får til kontinuitet for $x = 0$, men få får til kontinuitet ved $x = -\frac{1}{8}$. En del prøver å løse integralet først, hvilket ville vært en god idè dersom det lot seg løse, men det gjør det dessverre ikke (med de teknikkene vi behersker). En del påstår at for at funksjonen skal være kontinuerlig så må den også være deriverbar. Dette er feil (men det motsatte er riktig; dersom en funksjon skal være deriverbar så må den også være kontinuerlig).

b) La nå $A = 4$. Området i xy-planet avgrenset av x-aksen, grafen til f og linjene $x = 0$ og $x = 2$ roteres om y-aksen. Tegn en figur og beregn volumet av omdreiningslegemet som oppstår.

Løsningsforslag: Dropper tegning (se kommentaren under!), men merk at det er y-aksen som er omdreiningsakse, og at det er den biten av grafen til f som er gitt ved $xe^{\frac{1}{2}x} + 4$ som dreies. Prøv å se for dere en massiv sylinder med radius 2 og høyde $f(2) = 2e + 4$, med en skålformet uthulning som går fra ytterkanten av toppen av sylinderen, nedover og innover, før den avsluttes i høyde $f(0) = 4$.

Bruker sylinderskall-metoden for å løse oppgaven. Tenker da at legemet deles inn i tynne, hule sylindre, med radius x og høyde $f(x)$. Èn slik sylinder vil da gi volumbidrag $2\pi x f(x)\,dx$, så totalvolumet er gitt ved

$$2\pi \int_0^2 xf(x)\,dx = 2\pi \int_0^2 (x^2 e^{\frac{1}{2}x} + 4x)\,dx = 2\pi([x^2\,2e^{\frac{1}{2}x}]_0^2 - \int_0^2 2x\,2e^{\frac{1}{2}x}\,dx + [2x^2]_0^2)$$

$$= 2\pi[2x^2 e^{\frac{1}{2}x} - 8x\,e^{\frac{1}{2}x} + 16e^{\frac{1}{2}x} + 2x^2]_0^2 = 2\pi((8e - 16e + 16e + 8) - (16)) = 2\pi(8e - 8)$$

Kommentar: Det er en stor fordel å tegne figur her og virkelig tenke over hva man gjør! Da er det mye lettere å få alle tingene på (riktig) plass. Dessuten; når oppgaven lyder *Tegn en figur og beregn...* så *skal* en figur være med.

Hvis man ønsker å benytte skivemodellen, dvs dele inn volumet i mange tynne skiver, må man kutte i plan vinkelrett på y-aksen. Hver skive vil se ut som en (flat) smultering så lenge vi er i høyder mellom $y = 4$ og $y = 2e + 4$; hvor den ytre radien på skiven er 2, mens den indre radien er den x-verdien som hører sammen med $y = xe^{\frac{1}{2}x} + 4$. For y-verdier mellom 0 og 4 har vi kompakte skiver, radius 2. Tykkelsen på hver skive tenkes på som dy. Problemet med denne metoden er at vi trenger å finne x som en funksjon av y når vi skal gjennomføre integrasjonen mhp y. Dette er ikke lett!

Oppgave 5 Anta at f er en kontinuerlig funksjon på intervallet $[a, b]$, og at f har en maksimalverdi for et punkt $c \in (a, b)$. Vis at dersom $f'(c)$ eksisterer, så må $f'(c) = 0$.
(Hint: Bruk definisjonen av den deriverte.)

Løsningsforslag: At $(c, f(c))$ er et maksimalpunkt betyr at det finnes et intervall (på x-aksen) rundt c slik at alle x-verdier i dette intervallet har en funskjonsverdi $f(x)$ som er *mindre enn* (eller lik) $f(c)$.

Definisjonen av den deriverte i c er gitt ved

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Dette er en to-sidig grense, og den eksisterer bare dersom grensen fra høyre og venstre er like. Fra venstre har vi

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0,$$

hvor ulikheten følger av at $f(c)$ er et maksimalpunkt, så (for små nok verdier av h) har vi at $f(c+h) \leq f(c)$, noe som gir negativ teller, samtidig som $h < 0$, dvs vi har negativ nevner også, og dermed blir brøken positiv eller null. Grensen fra høyre blir

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0,$$

siden vi fortsatt har $f(c+h) - f(c) \leq 0$ (negativ teller), men denne gangen er $h > 0$ (positiv nevner). For at grensen fra høyre og venstre skal være like, må da grensen være 0.

Kommentar: Veldig mange får til definisjonen av den deriverte korrekt (noen glemmer lim). Men bare et fåtall bruker opplysningen om at vi faktisk er i et maksimalpunkt. Det er nødvendig i denne oppgaven! Veldig mange argumenterer med at den deriverte må være 0 siden telleren i definisjonen av den deriverte går mot 0 når h går mot 0. Det er riktig at telleren går mot null, men det vil den gjøre i *alle* punkt hvor den deriverte eksisterer (mer generelt; utrykket i teller vil gå mot null for alle punkt hvor vi har kontinuitet), det er ikke noe som er spesielt for et toppunkt.