NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse 1–løsning

Faglig kontakt under eksamen: Are Austad

Tlf: 473 48 991

Eksamensdato: 6. desember 2017

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Et formelark finnes vedlagt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Innsetting av $x+2y=4$ i produktet xy gir oss funksjonen $f(y) = 4y-2y^2 = 2-2(1-y)^2$, med $0 \le y \le 2$. Vi leser av at maksimum inntreffer når $y=1$. (Alternativt kan vi derivere, sette $f'(y)=0$ og finne at maksimum inntreffer når $y=1$ ved ekstremalverdisetningen siden $f(0)=f(2)=0$.) Den største verdien produktet xy kan ha, blir dermed 2.

Oppgave 2 Vi setter $f(x) = 2x - \sin x - 1$. Siden $f'(x) = 2 - \cos x \ge 1 > 0$ for alle x, er f strengt voksende på hele $\mathbb{R}$. Ligningen $f(x)=0$ kan derfor ha høyst én løsning. Vi observerer at $f(1/2) = -\sin(1/2) < 0$ og $f(1) = 1 - \sin 1 > 0$. Siden f er kontinuerlig for alle x, gir dermed skjæringssetningen at $f(x)=0$ for en x i $(1/2, 1)$.

Oppgave 3 Vi skal løse intitialverdiproblemet

$$y' + 2xy = e^{-x^2}, \quad y(0) = 1.$$

En integrerende faktor for denne lineære ligningen er e^{x^2}. Vi får dermed at generell løsning er $y = e^{-x^2}(x+C)$, hvor C er en vilkårlig konstant. Initialbetingelsen $y(0)=1$ gir $C=1$ og dermed $y(x) = e^{-x^2}(x+1)$.

Oppgave 4 Vi delbrøkoppspalter:

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}.$$

Setter vi på felles brøkstrek, får vi ligningene $A+C=1$, $B+C=0$, $A+B=0$, som har løsning $A=C=1/2$, $B=-1/2$. Altså:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{1-x}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan x + C\end{aligned}$$

som vi eventuelt også kan skrive som

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

Oppgave 5 Vi bruker analysens fundamentalsetning og kjerneregelen:

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{1} e^{-t^2}dt = -\frac{d}{dx}\int_{1}^{x^2} e^{-t^2}dt = -2xe^{-x^4}.$$

Oppgave 6 Funksjonen $y = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ har derivert $y' = (x-1)^{1/2}$. Dermed blir buelengden ℓ til grafen mellom $x = 1$ og $x = 2$:

$$\ell = \int_1^2 \sqrt{1 + (x-1)} dx = \frac{2}{3}[x^{3/2}]_1^2 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Oppgave 7 Vi setter $f(x) = x$ og finner at

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Vi har dermed vist at utsagnet

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \tag{1}$$

er sant for $n = 1$. Hvis utsagnet er sant for $n = k$, får vi ved produktregelen og det vi først viste at

$$\frac{d}{dx} x^{k+1} = \frac{d}{dx}\left(x^k \cdot x\right) = k x^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1) x^k.$$

Det følger nå ved induksjon at (1) holder for alle positive heltall.

Oppgave 8 Vi ser at

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 + (i/n)^2)} \cdot \frac{1}{n}$$

er en Riemann-sum for funksjonen $1/(1 + x^2)$ på intervallet $[0, 1]$ med hensyn på partisjonen $0, 1/n, ..., (n-1)/n, 1$. Dermed får vi

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Oppgave 9 Vi lar f være en funksjon som er kontinuerlig på $[1, 2]$ og har kontinuerlig derivert på $(1, 2)$. Vi antar at $f(1) = 1$ og at $1 \leq f'(x) \leq x$ for alle $x \in (1, 2)$. Siden analysens fundamentalsetning gir at

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

når $1 < a < x < 2$, følger det fra vår antagelse om f' at

$$\int_a^x dt + f(a) \leq f(x) \leq \int_a^x t dt + f(a).$$

Utfører vi de to integralene, får vi derfor

$$x - a + f(a) \leq f(x) \leq \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} + f(a)$$

for alle $1 < a < x < 2$. Lar vi a gå mot 1, får vi ved kontinuitet det ønskede resultat

$$x \leq f(x) \leq \frac{x^2 + 1}{2}$$

for alle $1 < x < 2$. Ulikheten holder per antagelse i venstre endepunkt $x = 1$ og ved kontinuitet i høyre endepunkt $x = 2$.

Oppgave 10 Vi antar at $x > -1$ og $r \geq 1$. Vi setter $f(x) = (1 + x)^r$. Siden f er kontinuerlig og deriverbar for $x > -1$, gir sekantsetningen at når $x \neq 0$, finnes det en c mellom 0 og x slik at

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) = r(1 + c)^{r-1}. \tag{2}$$

Vi skal nå bruke denne relasjonen til å vise Bernoullis ulikhet:

$$(1 + x)^r \geq 1 + rx. \tag{3}$$

Vi kan anta at $x \neq 0$ fordi (3) opplagt holder i dette tilfellet. Når $x > 0$, gir (2)

$$\frac{f(x) - 1}{x} \geq r.$$

Ganger vi denne ulikheten med x, får vi (3). Hvis vi på den annen side har $-1 < x < 0$, gir (2)

$$\frac{f(x) - 1}{x} \leq r.$$

Ganger vi denne ulikheten med x (som nå er negativ), får vi igjen (3).

(For de spesielt interesserte: Vi ser av beviset at vi har likhet i Bernoullis ulikhet hvis og bare hvis $x = 0$ og/eller $r = 1$.)