

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I**

Faglig kontakt under eksamen: Harald Hanche-Olsen

Tlf: 73 59 35 25

Eksamensdato: Tirsdag 8. august 2017

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 1

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig 2-sidig

sort/hvit farger

skal ha flervalgskjema

Dato

Sign

Oppgave 1 Finn største og minste verdi til funksjonen $f(x) = 7x^7 - 5x^5$ for $0 \leq x \leq 1$.

Oppgave 2 Vis at funksjonen $f(x) = x + \sin x + x^3$ har en omvendt (invers) funksjon $g = f^{-1}$, og regn ut $g'(\pi + \pi^3)$.

Oppgave 3 Regn ut grenseverdiene:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}$

b. $\lim_{x \rightarrow \pi} (x^2 - \pi^2) \tan(x/2)$

Oppgave 4 Bestem alle løsninger $y(x)$ til differensialligningen

$$y' = \frac{y}{1 + x^2}.$$

Oppgave 5 Vis at det finnes nøyaktig ett tall x slik at $0 < x < \sqrt{6}$ og

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = 1.$$

Du kan uten bevis bruke at

$$\sin t > t - \frac{t^3}{6} \quad \text{for alle } t > 0.$$

Oppgave 6 (Teller som to punkt.) Vis at integralet konvergerer, og regn ut verdien:

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

Oppgave 7 En partisjon Π av intervallet $[e, e^2]$ fremkommer ved å dele intervallet i n like store deler, der n er et positivt heltall. Hvor stor er differansen $\emptyset(\Pi) - N(\Pi)$ mellom øvre- og nedresummen for integralet

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{\ln x} ?$$

Hint: Integranden er monoton.

Formelark for MA1101

Ekspontialfunksjoner

Derivasjon: $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $a^x / a^y = a^{x-y}$ $a^{-x} = 1/a^x$
 $(a^x)^y = a^{xy}$ $a^x = e^{x \ln a}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln |x|)' = 1/x$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$ $\ln(1/x) = -\ln x$
 $\ln(x^a) = a \ln x$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
 $\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos v$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan v$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Arcusfunksjoner

Derivasjon: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Differensialligninger

Integrerende faktor for $y' + f(x)y = g(x)$ er $e^{F(x)}$, der $F'(x) = f(x)$.