MA1101 Grunnkurs i analyse I 2017-08-08

Løsning

Oppgave 1

Vi deriverer, og får $f'(x) = \big((7x)^2 - 5^2\big)x^4$. Dermed er $f'(x) = 0$ for $x = 0$ og $x = \pm\frac{5}{7}$. Bare én av disse verdiene, $x = +\frac{5}{7}$, ligger i intervallet $(0,1)$. Siden f er kontinuerlig og deriverbar, må ekstrempunktene i $[0,1]$ være blant endepunktene til intervallet og nullpunktet til f' i det indre. Så vi regner ut: $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ og $f(\frac{5}{7}) = \big(7(\frac{5}{7})^2 - 5\big)\big(\frac{5}{7}\big)^5 = -\frac{10}{7}\cdot\big(\frac{5}{7}\big)^5$. Altså er minimumsverdien $-2\big(\frac{5}{7}\big)^6$, mens maksimumsverdien er 2.

Oppgave 2

Den gitte funksjonen er kontinuerlig og deriverbar, med $f'(x) = 1 + \cos x + 3x^2 > 0$, fordi $1 + \cos x \ge 0$ og $3x^2 \ge 0$, og de to addendene aldri er null samtidig. Dermed er f strengt voksende, så den har en omvendt funksjon g. Vi vet at $g'\big(f(x)\big)f'(x) = 1$, og $x = \pi$ satt inn gir $g'(\pi + \pi^3)\cdot 3\pi^2 = 1$. Dermed er $g'(\pi + \pi^3) = 1/(3\pi^2)$.

Oppgave 3

a. Vi har et «0/0»-uttrykk, så L'Hôpitals regel kommer til anvendelse:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(x^2)}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{2x^2} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2},$$

der vi gjorde substitusjonen $u = x^2$ og benyttet en kjent grense. (Men to runder til med L'Hôpital ville også gjort susen.)

b. Her har vi et «$0\cdot\infty$»-problem, som må omformes litt før vi kan anvende L'Hôpital. En mulighet er å gjøre om tangens til cotangens i nevneren, og det fungerer fint – men vi kan spare litt tid på å faktorisere uttrykket slik:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi}(x^2-\pi^2)\tan(x/2) &= \lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)(x+\pi)\sin(x/2)}{\cos(x/2)} \\
&= \lim_{x\to\pi}(x+\pi)\sin(x/2)\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\cos(x/2)} \\
&= 2\pi\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{1}{-\frac{1}{2}\sin(x/2)} = -4\pi.
\end{aligned}$$

Den nest siste grensen i andre linje er rett frem, mens vi har anvendt L'Hôpital på den siste.

Oppgave 4

Ligningen er separabel, og kan skrives på formen

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Integrasjon gir $\ln|y| = \arctan x + C_1$, og tar vi eksponentialfunksjonen på begge sider får vi

$$y = Ce^{\arctan x}$$

der $C = \pm e^{C_1} \neq 0$. Men også $C = 0$ gir en løsning, som vi mistet underveis da vi dividerte med y i starten. Dermed kan C være et vilkårlig reelt tall.

Oppgave 5

Vi definerer

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad (x \in [0,1])$$

og merker oss at

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} > 0$$

for $x \in (0, \sqrt{6})$ (faktisk i $(0,\pi)$), så f er strengt voksende i intervallet. Videre er $f(0) = 0$, og

$$f(\sqrt{6}) = \int_0^{\sqrt{6}} \frac{\sin t}{t}\,dt > \int_0^{\sqrt{6}} \Big(1 - \frac{x^2}{6}\Big) = \sqrt{6} - \frac{(\sqrt{6})^3}{18} = \frac{2}{3}\sqrt{6} > 1,$$

så mellomverdisetningen (skjæringssetningen anvendt på $f(x) - 1$ om du vil) sier at det finnes en $x \in (0,1)$ med $f(x) = 1$. Fordi f er strengt voksende, finnes bare én slik x.

Oppgave 6

Vi kan raskt fastslå at integralet konvergerer, for integranden er positiv og mindre enn $1/x^2$, og $\int_1^\infty x^{-2}\,dx$ konvergerer. Men konvergensen følger også av de mer konkrete regningene nedenfor:

Vi kan starte med det *ubestemte* integralet. Delvis integrasjon etterfulgt av delbrøkoppspalting gir

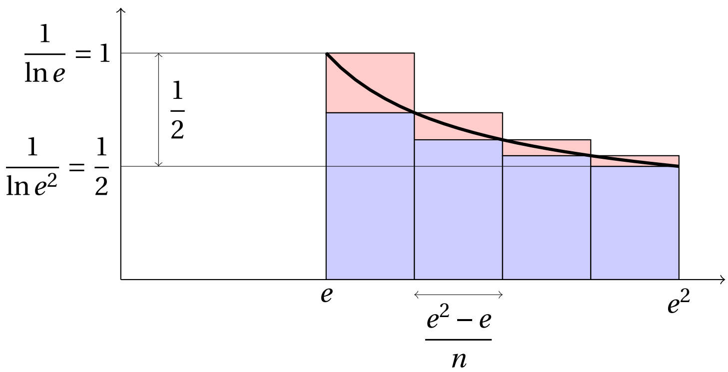
$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx &= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \int \Big(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\Big)\,dx \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \ln x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C,\end{aligned}$$

som vi kan se konvergerer mot C når $x \to \infty$, slik at

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \frac{\arctan 1}{1} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Oppgave 7

Se figuren nedenfor, her med $n = 4$. Nedresummen $N(\Pi)$ er summen av arealene til de blå søylene i figuren. Differansen mellom øvre- og nedresum $Ø(\Pi) - N(\Pi)$ er summen av arealene til de røde rektanglene. De har alle samme bredde $(e^2 - e)/n$, mens summen av høydene er $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Dermed er summen av arealene lik $\frac{1}{2}(e^2 - e)/n = (e^2 - e)/(2n)$.



De to aksene er skalert forskjellig, for å gjøre figuren tydeligere.

Denne metoden er brukt i beviset for at monotone funksjoner er integrerbare – se læreboken side 407, der metoden illustreres med en *voksende* integrand.