

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I**

Faglig kontakt under eksamen: Harald Hanche-Olsen^a, Trond Digernes^b, Kari Hag^c

Tlf: ^a 73 59 35 25, ^b 926 63 816, ^c 483 01 988

Eksamensdato: Tirsdag 20. desember 2016

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

I originalutgaven gikk formelarket over to sider, fordi vi ikke rakk å gjøre håndgrepene som skal til for å få det inn på én side. Ut over det, er denne utgaven identisk med originalen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig <input type="checkbox"/>	2-sidig <input checked="" type="checkbox"/>
sort/hvit <input checked="" type="checkbox"/>	farger <input type="checkbox"/>
skal ha flervalgskjema <input type="checkbox"/>	

Dato

Sign

Oppgave 1 Vis at ligningen

$$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = 0$$

har nøyaktig én reell løsning.

Oppgave 2 Bestem løsningen til differensialligningen

$$y' - y = e^x \quad \text{med } y(0) = 0.$$

Oppgave 3 Finn alle asymptoter til funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Oppgave 4 Regn ut grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos^2(\ln x)}{(\ln x)^2}.$$

Oppgave 5 Avgjør om integralet

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

konvergerer, og regn i så fall ut verdien.

Oppgave 6 Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \cos \sqrt{x} dx.$$

Oppgave 7 Formen på et kar fremkommer ved å rotere kurven $y = x^{1/4}$, for $x \in [0, H]$, om x -aksen. Karet står med rotasjonsaksen vertikalt, med den positive x -aksen oppover, slik at det går å helle vann i det.

a. Hvor stort er vannvolumet $V(h)$ i karet når vannet står i høyde h over bunnen ($h \leq H$)?

b. Det er et hull i bunnen av karet. I følge Toricellis lov lekker vatnet ut av hullet med en rate (volum per tidsenhet) $ah^{1/2}$, der a er konstant.

Regn ut dh/dt uttrykt ved a og h .

(Hvis du regner rett, vil du oppdage at h ikke inngår i svaret likevel.)

Oppgave 8 Bestem alle løsninger $y(x)$ til differensialligningen

$$y' = y - y^3. \quad (1)$$

Oppgave 9 Anta at en funksjon f definert i et åpent intervall (a, b) er deriverbar i (a, c) og i (c, b) der $c \in (a, b)$. Anta også at f er kontinuerleg i c , og at grensen

$$\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$$

eksisterer. Vis at da er f deriverbar i c , og at f' er kontinuerlig i c .

Formelark for MA1101

Ekspontialfunksjoner

Derivasjon: $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $a^x / a^y = a^{x-y}$ $a^{-x} = 1/a^x$
 $(a^x)^y = a^{xy}$ $a^x = e^{x \ln a}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln |x|)' = 1/x$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$ $\ln(1/x) = -\ln x$
 $\ln(x^a) = a \ln x$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
 $\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos v$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan v$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Arcusfunksjoner

Derivasjon: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Differensialligninger

Integrerende faktor for $y' + f(x)y = g(x)$ er $e^{F(x)}$, der $F'(x) = f(x)$.