MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I 2016-12-20

Løsning

Oppgave 1

Setter vi $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 + 1$, finner vi $f'(x) = 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 > 0$, unntatt for $x = 0$, der $f'(0) = 0$. Det følger at f er strengt voksende funksjon både på $(-\infty, 0]$ og på $[0, \infty)$, og dermed på hele tallinjen. Derfor har ikke ligningen *mer* enn én løsning.

For å se at det finnes (minst) en løsning, merk at $f(0) = 1 > 0$ og $f(-1) = -2 < 0$, og benytt skjæringssetningen (som bare krever at f er kontinuerlig).

Oppgave 2

Ligningen har en integrerende faktor e^{-x}. Etter multiplikasjon med denne har den formen $(e^{-x}y)' = 1$, og derfor $e^{-x}y = x + C$ for en konstant C. Initialbetingelsen $y(0) = 0$ gir $C = 0$, så $y = xe^x$.

Oppgave 3

Merk først at $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, så f er definert – og kontinuerlig – på hele $\mathbb{R}$. Dermed trenger vi bare se etter skråasymptoter. Vi kan begynne med

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -1.$$

Videre er da

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

så $y = x + \frac{1}{2}$ er en skråasymptote når $x \to \infty$.

Deretter

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) + x &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

så $y = -x - \frac{1}{2}$ er en skråasymptote når $x \to -\infty$.

I regningen har vi gjentatte ganger benyttet $\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}}$ når $x > 0$, $\frac{1}{x} = -\sqrt{\frac{1}{x^2}}$ når $x < 0$.

Oppgave 4

Når $x \to 1$, vil $\ln x \to 0$, så

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos^2(\ln x)}{(\ln x)^2} = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos^2 u}{u^2} = \lim_{u\to 0} \frac{2\sin u \cos u}{2u} = 1.$$

I den midterste likheten benyttet vi L'Hôpitals regel, siden vi hadde et $0/0$-uttrykk. I den siste likheten har vi benyttet den kjente grensen $(\sin x)/x \to 1$ når $x \to 0$. Men vi kunne også kommet frem ved å bruke L'Hôpital en gang til.

Oppgave 5

Delvis integrasjon gir

$$\int_0^b xe^{-x}\,dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^b + \int_0^b e^{-x}\,dx = -be^{-b} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^b = 1 + (1-b)e^{-b} \to 1$$

når $b \to \infty$, så integralet konvergerer, og

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1.$$

Oppgave 6

Her kan vi substituere inn $x = t^2$. Det gir $dx = 2t\,dt$. Etter substitusjonen fortsetter vi med en delvis integrasjon:

$$\int \cos\sqrt{x}\,dx = 2\int t\cos t\,dt = 2\Big(t\sin t - \int \sin t\,dt\Big) = 2t\sin t + 2\cos t + C = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C.$$

Oppgave 7

a. Vannet i karet fyller volumet som fremkommer ved å rotere området $0 \le y \le x^{1/4}$, $0 \le x \le h$ om x-aksen. Dette volumet blir

$$V(h) = \int_0^h \pi(x^{1/4})^2\,dx = \int_0^h \pi x^{1/2}\,dx = \tfrac{2}{3}\pi h^{3/2}.$$

b. Kjerneregelen gir

$$\frac{dV(h)}{dt} = V'(h)\frac{dh}{dt}.$$

Vi noterer fra **a** at $V'(h) = \pi h^{1/2}$, og det er oppgitt at venstresiden er $-ah^{1/2}$. Innsatt får vi da

$$-ah^{1/2} = \pi h^{1/2}\frac{dh}{dt}, \qquad \text{så} \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{a}{\pi}.$$

Oppgave 8

Differensialligningen er separabel, og generell løsning får formen

$$\int \frac{dy}{y-y^3} = \int dx = x + C_1. \tag{1}$$

For å håndtere y-integralet, må vi delbrøkoppspalte. Nå er $y - y^3 = -y(y+1)(y-1)$, så vi skal ha

$$\frac{1}{y-y^3} = \frac{A}{y} + \frac{B_1}{y+1} + \frac{B_2}{y-1}.$$

Etter multiplikasjon med fellesnevneren $y^3 - y$ har vi

$$-1 = A(y^2-1) + B_1(y^2-y) + B_2(y^2+y) = (A+B_1+B_2)y^2 + (B_2-B_1)y - A.$$

Vi sammenligner like potenser av y, og får $A = 1$, $B_2 = B_1$, og $A + B_1 + B_2 = 0$, så $B_1 = B_2 = -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}$. Dermed blir

$$\int \frac{dy}{y-y^3} = \int\Big(\frac{1}{y} - \frac{1/2}{y+1} - \frac{1/2}{y-1}\Big)dy = \ln|y| - \tfrac{1}{2}\ln|y+1| - \tfrac{1}{2}\ln|y-1| = \ln\frac{|y|}{\sqrt{|y^2-1|}}$$

(pluss en integrasjonskonstant, som vi har tillatt oss å sette lik null fordi vi allerede har en integrasjonskonstant C_1 fra x-integralet). Dette setter vi inn i (1), tar eksponentialfunksjonen av begge sider, med resultat

$$\frac{|y|}{\sqrt{|y^2-1|}} = C_2 e^x,$$

der $C_2 = e^{C_1} > 0$. Vi ganger opp med kvadratroten og kvadrerer:

$$y^2 = C_2^2 e^{2x} |y^2-1| = C_3 e^{2x}(y^2-1),$$

der $C_3 = \pm C_2^2 \neq 0$. Dette løser vi så med hensyn på y, med resultat

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{1+Ce^{-2x}}}, \tag{2}$$

der $C = -1/C_3$ er en vilkårlig konstant forskjellig fra null.

I tillegg må vi huske at vi startet med å dividere med $y - y^3$, som er null når $y = 0$ eller $y = \pm 1$. Vi ser at disse tre gir konstante løsninger som også må regnes med. Løsningene $y = \pm 1$ kan vi også få fra (2) ved å sette $C = 0$, som i utgangspunktet var utelukket. Dermed kan vi tillatte en vilkårlig reell C i (2), og så har vi altså løsningen $y = 0$ i tillegg (som vi for øvrig også får fra (2) ved å la $C \to -\infty$).

Det kan være verdt å merke seg at $C \geq 0$ leder til løsninger med $|y| \leq 1$ som er definert for alle x, mens $C < 0$ gir ubegrensede løsninger som kun er definert for $x \in (-\infty, -\ln(-C))$.

Oppgave 9

Vi skriver opp definisjonen av $f'(c)$:

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Fordi f er kontinuerlig, og deriverbar i (c,x) eller (x,c), kan vi benytte sekantsetningen, som sier at det finnes en s mellom x og c slik at

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(s).$$

Når $x \to c$ vil også $s \to c$, så $f'(s) \to L$, der

$$L = \lim_{x\to c} f'(x).$$

Dermed er $f'(c) = L$, og spesielt er da f' kontinuerlig i c.

Litt mer detalj i avslutningen: Anta $\varepsilon > 0$, og velg $\delta > 0$ slik at dersom $|x-c| < \delta$, så er $|f'(x) - L| < \varepsilon$. Men om $|x-c| < \delta$, er også $|s-c| < \delta$, fordi s ligger mellom x og c. Og da er jo $|f'(x) - L| < \varepsilon$, og derfor også

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - L\right| < \varepsilon.$$

Noen vil sikkert foretrekke å arbeide med følger: Betrakt en vilkårlig følge $\{x_n\}$ i (a,b) med $x_n \neq c$ og $x_n \to c$, og vis at $\big(f(x_n) - f(c)\big)/\big(x-c\big) \to L$. Detaljene vil bruke sekantsetningen på samme måte som over, men man slipper å involvere ε og δ eksplisitt.

I stedet for sekantsetningen kunne vi benyttet L'Hôpitals regel. (Flertallet vil kanskje gjøre det!)

Meld fra om feil i løsningen til Harald Hanche-Olsen (`hanche@math.ntnu.no`) *– alt fra stave- og grammatikkfeil til mer alvorlige matematiske feil! Si også fra om du mener løsningen er uklar. Jeg* lover *ikke å legge til detaljer, men gjør det hvis jeg blir overbevist om at det trengs.*