NTNU
Institutt for matematiske fag

MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Prosjekt

Høst 2023

Prosjektet leveres som PDF i Inspera på enten Engelsk eller Norsk. Dere kan jobbe i par eller alene. Instruksjoner for innlevering: Gruppeinnlevering+i+Inspera. Hvis du leverer individuelt, må du være i en gruppe for deg selv. Skriv også ditt/deres kandidatnummer på toppen av dokumentet som du leverer inn.

Prosjektet er obligatorisk og teller 30% av karakteren i emnet. Dere skal svare på tre oppgaver. To av dem kan dere selv velge blant oppgave 1–4, mens alle må gjøre oppgave 5.

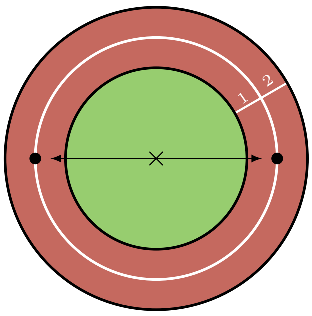
Legg frem rigorøse argumenter/utledninger. Tenk at du forklarer løsningene/begrepene for noen som kan matematikk, men ikke temaene du legger frem. Henviser du til resultater som er gitt i boken eller i forelesning, må dette spesifiseres.

Velg to av oppgavene 1–4.

1

a) La $f\colon [0,1] \to [0,1]$ være en kontinuerlig funksjon. Vis at det finnes en $c \in [0,1]$ slik at $f(c) = c$.
Hint: Se på funksjonen $g(x) = x - f(x)$.

b) Du skal løpe én gang rundt en sirkulær bane. Vi antar at farten er null idet du starter og idet du går i mål. Vis at det alltid vil finnes to diametralt motsatte punkter i banen hvor farten er like stor.
Merk: Farten er en kontinuerlig funksjon.



Figur: Diametralt motsatte punkter.

Løsning: Oppgave 1

a)

Bevis. Vi vil vise at det eksisterer en $c \in [0,1]$ slik at $f(c) = c$. Med en lett omskriving ser vi at dette er det samme som at $c - f(c) = 0$, eller ekvivalent at $g(x)$ har ett nullpunkt i intervallet $[0, 1]$. Før vi begynner for fullt kan vi notere oss bak øret at siden g er en sum av to kontinuerlige funksjoner, må den selv nødvendigvis også være kontinuerlig (Teorem 2.4.3 i boken)

La oss begynne med å se på endepunktene i intervallet. Hvis $g(0) = 0$ eller $g(1) = 0$ er vi ferdige, så vi kan godt anta at dette ikke er tilfelle. Altså antar vi $g(0) \neq 0$ og $g(1) \neq 0$. Den første ulikheten gir oss at

$$0 \neq g(0) = 0 - f(0),$$

og siden verdimengden til f er inneholdt i $[0, 1]$, må nødvendigvis $f(0)$ ligge i $(0, 1]$ eller spesielt $f(0) > 0$. Det vil spesifikt si at $g(0) = -f(0) < 0$.

Den andre ulikheten forteller oss at

$$0 \neq g(1) = 1 - f(1),$$

og nok en gang siden verdimengden til f er inneholdt i $[0, 1]$, må nødvendigvis $f(1) \in [0, 1)$, spesielt $f(1) < 1$. Det vil dermed gi oss at $g(1) = 1 - f(1) > 0$.

Vi kan nå begynne å ane at skjæringssetningen er rett rundt hjørnet, så la oss repetere det kort:

> **Teorem 2.5.1 – Skjæringssetningen**
>
> Anta at f er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Hvis K er ett tall mellom $f(a)$ og $f(b)$, så fins en $c \in [a, b]$ slik at $f(c) = K$.

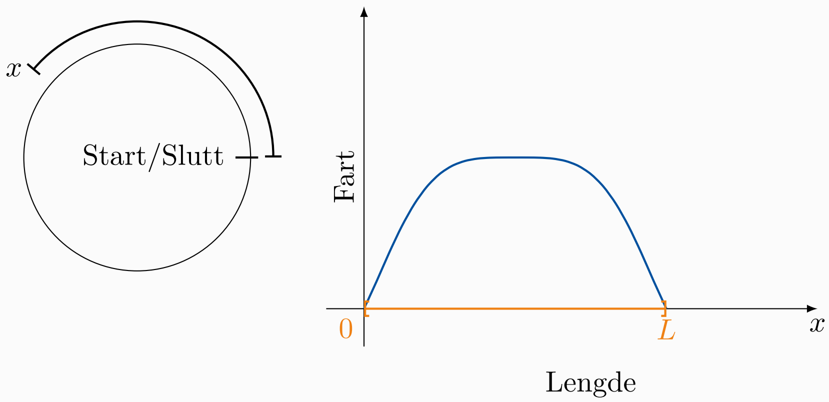
Fra det vi har utledet over vet vi at g er kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ og $f(0) < 0 < f(1)$. Altså følger det direkte fra skjæringssetningen at det eksisterer en $c \in [0, 1]$ slik at $g(0) = 0$. Hva betød dette nå igjen? Jo

$$0 = g(c) = c - f(c) \quad \Longrightarrow \quad f(c) = c,$$

som var det vi bega oss ut for å vise. Vi er dermed ferdige. $\square$

b)

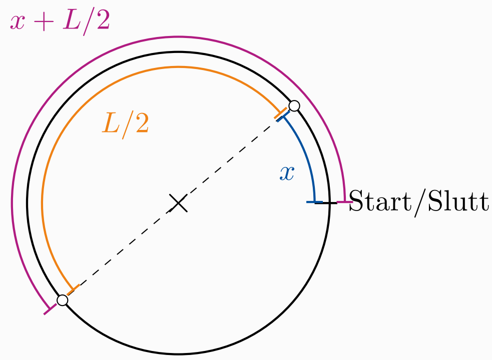
Bevis.



Vi må kunne anta at farten varierer kontinuerlig med posisjon i banen. Det vil si at vi har en kontinuerlig funksjon $v\colon [0, L] \to [0, \infty)$ hvor L er banelengden, og $v(x)$ er hastigheten du har etter å ha løpt x meter.

Vi tar først for oss diametralt motsatte punkter. Punktet på motsatt side av sirkelen må være en halv banelengde foran eller bak der vi står. Hvis vi uttrykker punktene på banen ved avstand fra start, vil alle diametralt motsatte punkter være på formen

$$x \;\text{ og }\; x + L/2, \text{ for } x \in [0, L/2].$$



Hva betyr det så at det finnes to diametralt motsatte punkter hvor farten er like stor? Jo, det kan vi da tolke som at for en $c \in [0, L/2]$, så er

$$v(c) = v(c + L/2).$$

Lett inspirert av forrige deloppgave lager vi oss en ny funksjon for beviset. Hvis vi ser på funksjonen $f\colon [0, L/2] \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = v(x) - v(x + L/2)$, ser vi at vi er ferdige om vi har vist at denne har et nullpunkt. Vi noterer oss også her at funksjonen er kontinuerlig siden den er en sum av to kontinuerlige funksjoner.

Vi ser på hva som skjer i endepunktene. Hvis $f(0) = 0$ eller $f(L/2) = 0$ så er vi ferdige, dermed kan vi godt anta at de begge er ulik 0. Det at $f(0) \neq 0$, gir oss nødvendigvis at

$$f(0) = v(0) - v(L/2) = -v(L/2) < 0,$$

siden $v(0) = 0$, og $v(x) \geq 0$ for alle $x \in [0, L]$. Tilsvarende får vi at $f(L/2) \neq 0$ gir oss

$$f(L/2) = v(L/2) - v(L) = v(L/2) > 0.$$

Vi kan dermed også i denne deloppgaven benytte oss av skjæringssetningen til å finne ett nullpunkt $c \in [0, L/2]$ for f, og dermed

$$v(c) = v(c + L/2).$$

$\square$

2

a) La f være en funksjon som er kontinuerlig i $[a, b]$, to ganger deriverbar på (a, b), og der
$$f(a) = f(d) = f(b) = 0$$
for en $d \in (a, b)$. Vis at det da finnes en $c \in (a, b)$ slik at $f''(c) = 0$.

b) Anta at f er kontinuerlig i $[a, b]$, to ganger deriverbar i (a, b) og f'' har nøyaktig ett nullpunkt i (a, b). Vis at $f(x)$ kan ha maksimalt tre nullpunkter i $[a, b]$.

Løsning: Oppgave 2

Her vil vi nok få bruk for Rolles Teorem, så la oss repetere det først som sist.

Teorem 2.7.1 – Rolles Teorem

Anta f er kontinuerlig i $[a, b]$ og deriverbar på (a, b). Hvis $f(a) = f(b) = 0$, så fins minst ett punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = 0$.

a)

Bevis. Ved Rolles Teorem så vet vi at det eksisterer $c_1 \in (a, d)$ og $c_2 \in (d, b)$ slik at $f'(c_1) = 0$ og $f'(c_2) = 0$. Videre vet vi at f' igjen er deriverbar på (a, b), så spesielt må den være kontinuerlig på $[c_1, c_2]$ og deriverbar på (c_1, c_2). Vi kan dermed finne en $c \in (c_1, c_2) \subset (a, b)$ slik at $f''(c) = 0$. $\square$

b)

Bevis. Anta med mål om motsigelse at det er fire (eller flere) nullpunkter i $[a, b]$. Altså
$$f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = f(c_4) = 0$$
og c_1, c_2, c_3 og c_4 er ulike. Her kan vi også godt anta at $a \leq c_1 < c_2 < c_3 < c_4 \leq b$. Ved Rolles Teorem kan vi nå se at vi kan finne $d_1 \in (c_1, c_2)$, $d_2 \in (c_2, c_3)$ og $d_3 \in (c_3, c_4)$ slik at
$$f'(d_1) = f'(d_2) = f'(d_3) = 0.$$
Vi kan igjen bruke Rolles teorem og se at det eksisterer $e_1 \in (d_1, d_2)$ og $e_2 \in (d_2, d_3)$ slik at
$$f''(e_1) = f''(e_2) = 0.$$
Dette er en motsigelse av antagelsen vår om at f'' har nøyaktig ett nullpunkt i (a, b), så vi konkluderer med at f har maksimalt tre nullpunkter i $[a, b]$. $\square$

3 Vi ser på funksjonen definert ved
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{hvis } x = 0. \end{cases}$$

Knut har avgjort at f ikke har en derivert for $x = 0$. Argumentasjonen hans står oppført under.

a) Forklar hvorfor argumentasjonen til Knut ikke er gyldig.

b) Avgjør om $f'(0)$ eksisterer. Gi enten et gyldig argument for at den ikke eksisterer eller finn $f'(0)$.

> **Knut sitt argument**
>
> Vi finner ved regneregler for den deriverte at
>
> $$f'(x) = 2x\cos(\tfrac{1}{x}) + \sin(\tfrac{1}{x}),$$
>
> for $x \neq 0$. For å bestemme $f'(0)$ ser vi på $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Vi observerer at
>
> $$\lim_{x\to 0} 2x\cos(\tfrac{1}{x}) = 0,$$
>
> samt at $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ ikke eksisterer. Generelt har vi at hvis
>
> $$\lim_{x\to a} g(x)$$
>
> eksisterer, men
>
> $$\lim_{x\to a} h(x)$$
>
> ikke eksisterer, så vil ikke $\lim_{x\to 0}(g(x)+h(x))$ eksistere. Dermed konkluderer vi med at $\lim_{x\to a} f'(x)$ ikke eksisterer, og da heller ikke $f'(0)$.

c) Bestem om følgende utsagn er riktig: Dersom f er deriverbar i et åpent intervall (a, b), og strengt avtagende i dette intervallet, så må $f'(x) < 0$ for alle x i intervallet. Gi et bevis eller moteksempel.

Løsning: Oppgave 3

a) Argumentasjonen til Knut bryter sammen allerede da han bestemmer seg for å finne $f'(0)$ ved å regne ut $\lim_{x\to 0} f'(x)$. Ved å gjøre det antar han implisitt at den deriverte til en funksjon må være kontinuerlig, noe den ikke nødvendigvis må være. Se Eksempel 2.23.1 for liknende tilfelle.

b) Vi benytter oss av definisjonen til den deriverte.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^2\cos(\frac{1}{0+h})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h\cos(\tfrac{1}{h}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Den siste grenseverdien kommer av skvisregelen. Hvordan? Jo, vi tar i bruk at $\cos(1/h)$

er begrenset av -1 og 1, altså må

$$-|h| \leq h\cos\left(\frac{1}{h}\right) \leq |h|$$

Nå ser vi at

$$\lim_{h\to 0} -|h| = 0 = \lim_{h\to 0} |h|$$

og dermed må

$$\lim_{h\to 0} h\cos(1/h) = 0$$

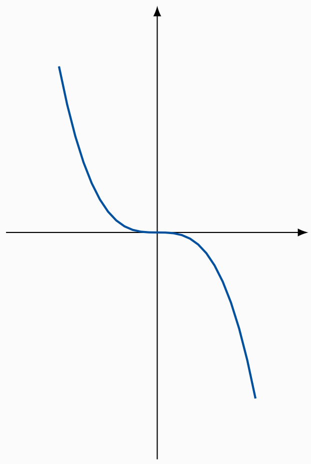
ved skvisregelen.

Vi har dermed vist at $f'(0)$ eksisterer og at den er lik 0.

c) Utsagnet er dessverre ikke korrekt. Vi kan for eksempel se på funksjonen f gitt ved $f(x) = -x^3$. Den er strengt avtagende på alle åpne intervaller (a, b).

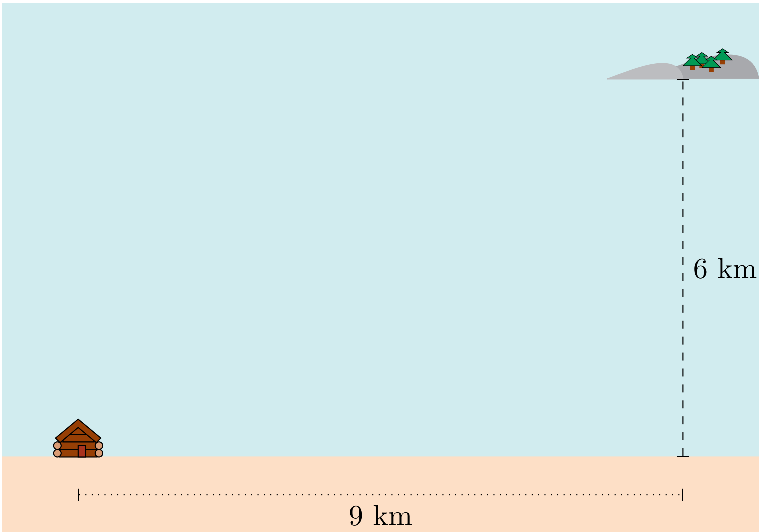
$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(y) = -y^3 < -x^3 = f(x)$$

Dette gjelder da spesielt for ethvert intervall som inneholder 0, og vi kan se at $f'(0) = 0$.



4 En holme ligger 6 km fra strandkanten. 9 km fra det punktet på stranden som er nærmest holmen, ligger det en hytte. Hvis man ror med en fart av 3 km/t og går med en fart av 5 km/t, hva er den korteste tiden man kan bruke fra holmen til hytta?

Husk: Et gyldig svar må inkludere argumentasjon for hvorfor fremgangsmåten din gir korrekt svar.



Figur: Illustrasjon av hytta og holmen.

Løsning: Oppgave 4

Vi kan først repetere hvordan forholdet mellom fart, avstand og tid er. Avstand delt på fart gir tiden det tar å tilbakelegge avstanden. Altså, hvis v er farten og s er strekningen, så vil $t = s/v$ være tiden.

Nå kan vi takle problemet. Vi kunne tenkt at vi helst burde ro så lite som mulig siden det tar lengder tid. Da ville vi totalt brukt

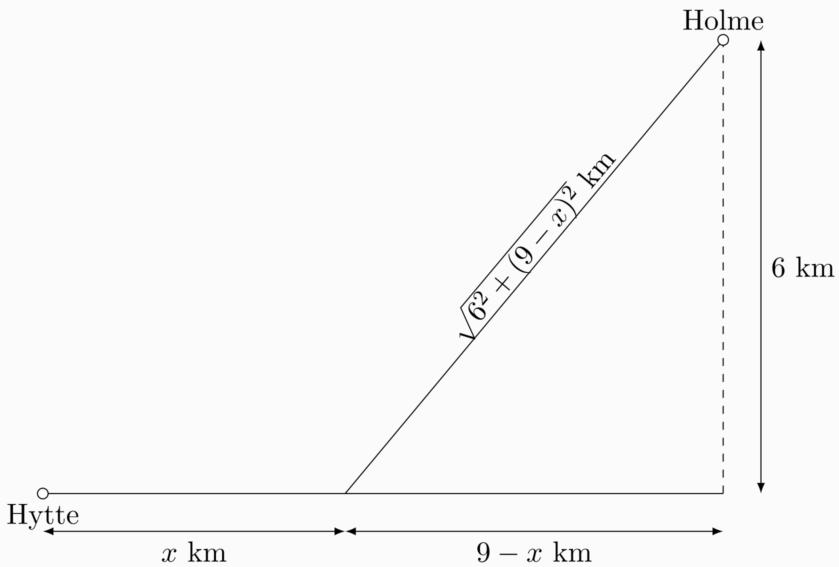
$$\frac{9 \text{ km}}{5 \text{ km/t}} + \frac{6 \text{ km}}{3 \text{ km/t}} = \frac{19}{5}\text{t} = 3 \text{ timer, } 48 \text{ minutter.}$$

Eventuelt kunne vi tenkt at det å reise langs diagonalen alltid gir kortest reisevei og dermed er en god kandidat. Da hadde vi reist $\sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117}$ km, og brukt

$$\frac{\sqrt{117}}{3} \approx 3.6 \text{ t} = 3 \text{ timer og } 36 \text{ minutter.}$$

Etter de krumspringene kan vi tenke oss at det muligens er en gylden middelvei. La oss derfor modellere problemet litt mer generelt. Vi tenker oss at vi går x kilometer før vi ror rett ut mot holmen fra der. For å finne ut hvor langt vi ror må vi ty til pytagoras. Vi ror langs hypotenusen til en rettvinklet trekant hvor ene kateten er 6 km og den andre kateten er $9 - x$ km, altså må hypotenusen være $\sqrt{6^2 + (9-x)^2}$

km$= \sqrt{x^2 - 18x + 117}$ km.



Vi tilbakelegger altså avstanden $x + \sqrt{6^2 + (9-x)^2}$ km, men siden farten avhenger av om vi går eller ror, så må vi holde tunga rett i munnen. Vi bruker $x/5$ timer på å gå og $\sqrt{x^2 - 18x + 117}/3$ timer på å ro. Totalt vil tiden være gitt ved funksjonen

$$f(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 18x + 117}}{3},$$

som vi definerer på intervallet $D_f = [0, 9]$, siden vi ellers vil tilbakelegge en større distanse både gående og roende enn de to tilfellene vi allerede har sett på. Denne er i tillegg kontinuerlig på dette intervallet, så ved ekstremalverdisetningen,

Teorem 2.5.3 – Ekstremalverdisetningen

Hvis f er kontinuerlig og D_f er et lukket intervall $[a, b]$, så har f minst ett maksimumspunkt og ett minimumspunkt.

Ekstremalverdier kan vi enten finne på randen (ytterpunktene) eller i det indre av $D_f = [0, 9]$. Ved Teorem 2.7.1 vet vi at

Teorem 2.7.1 – Test for lokale ekstremalpunkter

La a være et punkt i det indre av D_f, og anta at a er deriverbar i a. Hvis $x = a$ er et lokalt ekstremalpunkt for f, så er $f'(a) = 0$.

så hvis vi kan finne én $a \in (0, 9)$ slik at $f'(a) = 0$, og i tillegg $f(a) < f(0)$ og $f(a) < f(9)$, må dette være et minimalpunkt.

Vi tar dermed fatt på å finne $f'(x)$ og dens eventuelle nullpunkter.

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{1}{5} + \frac{x-9}{3\sqrt{x^2-18x+117}} &= 0 \\
&\Updownarrow (I) \\
\frac{x-9}{3\sqrt{x^2-18x+117}} &= -\frac{1}{5} \\
&\Updownarrow (II) \\
5x-45 &= -3\sqrt{x^2-18x+117} \\
&\Downarrow (III) \\
(5x-45)^2 &= (-3\sqrt{x^2-18x+117})^2 \\
&\Updownarrow (IV) \\
25x^2-450x+45^2 &= 9x^2-162x+1053 \\
&\Updownarrow (V) \\
16x^2-288x+972 &= 0 \\
&\Updownarrow (VI) \\
x^2-18+243/4 &= 0
\end{aligned}$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2-243}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{18 \pm 9}{2} = \begin{cases} 9/2 \\ 27/2 \end{cases} .$$

Vi kan umiddelbart forkaste $x = \frac{27}{2}$ som løsning, siden det ligger utenfor definisjonsmengden til f. Vi kunne eventuelt også satt prøve på svaret vårt, og observert at $x = 27/2$ slett ikke er ett nullpunkt for den deriverte:

$$f'(\tfrac{9}{2}) = \frac{1}{5} + \frac{\frac{9}{2}-9}{3\sqrt{(\frac{9}{2})^2 - 18\cdot\frac{9}{2} + 117}} = \frac{1}{5} + \frac{-\frac{9}{2}}{3\cdot\frac{15}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0 \checkmark$$

$$f'(\tfrac{27}{2}) = \frac{1}{5} + \frac{\frac{27}{2}-9}{3\sqrt{(\frac{27}{2})^2 - 18\cdot\frac{15}{2} + 117}} = \frac{1}{5} + \frac{\frac{9}{2}}{3\cdot\frac{15}{2}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \neq 0 \times$$

Vi tar en liten digresjon inn i hvor denne falske roten dukket opp. Observer at vi i overgang (III) opphøyet begge sider av likningen i andre. Høyresiden gikk da fra å alltid være negativ til å bli positiv, noe som utvidet løsningsmengden vår.

Vi kommer oss tilbake fra digresjonen og regner ut

$$f(\tfrac{9}{2}) = \frac{\frac{9}{2}}{5} + \frac{\sqrt{(\frac{9}{2})^2 - 18\cdot\frac{9}{2} + 117}}{3} = \frac{9}{10} + \frac{5}{2} = 3.4 \text{ timer} = 3 \text{ timer og } 24 \text{ minutter.}$$

Observer at $f(9/2) < f(0)$ og $f(9/2) < f(9)$. Hvis det hadde eksistert en $a \in D_f$ slik at $f(a) < f(9/2)$, måtte vi hatt minst ett annet ekstremalpunkt i det indre av $(0, 9)$, og nødvendigvis minst ett annet nullpunkt for $f'(x)$. Vi konkluderer med at $x = 9/2$ er et minimalpunkt, og dermed den minste tiden man kan bruke på reisen mellom hytta og holmen er 3 timer og 24 minutter.

Alternativ fremgangsmetode
Vi kunne alternativt brukt Teorem 2.7.6,

Teorem 2.7.6 – Den deriverte bestemmer monotonitet

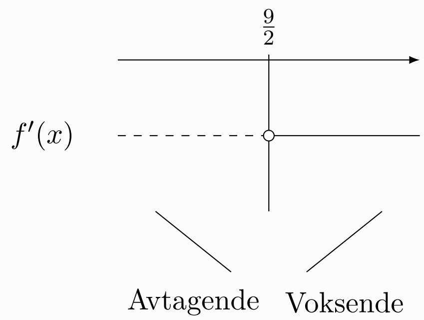
Anta at f er kontinuerlig på intervallet I.

- Hvis $f'(x) > 0$ på det indre av I, så er f strengt voksende på I
- Hvis $f'(x) < 0$ på det indre av I, så er f strengt avtagende på I

sammen med at f' er en kontinuerlig funksjon og at en kontinuerlig funksjon bytter fortegn kun i ett nullpunkt, for å argumentere. Da evaluerer vi $f'(x)$ i en $x < 9/2$ og i en $x > 9/2$, ser at

$$
\begin{aligned}
f'(x) &< 0, \quad \text{for } x < 9/2 \\
f'(x) &> 0, \quad \text{for } x > 9/2.
\end{aligned}
$$

Altså f er strengt avtagende for $x \in [0, 9/2)$ og strengt voksende for $x \in (9/2, 9]$, og har dermed nødvendigvis ett minimalpunkt for $x = 9/2$.



Siste oppgave obligatorisk.

$\boxed{5}$ Identifiser tre matematiske begrep/resultater du har benyttet mens du løste de første oppgavene. Skriv en kort forklaring av dem og illustrer det med enkle eksempler.

Potensielle begrep:

- Grenseverdi
- Kontinuitet
- Derivert
- Maksimal-/ekstremalverdier
- Asymptoter

Potensielle resultat:

- Skvisregelen
- Kjerneregelen
- Ekstremalverdisetningen
- Middelverdi-setningen
- Rolles teorem
- Skjæringssetningen

Merk

Listen over er ikke absolutt. Dere kan velge andre begrep/resultater fra faget så lenge dere har brukt dem og dere forklarer dem godt. Sjekk eventuelt `https://wiki.math.ntnu.no/ma1101/2023h/tema` for flere begrep/temaer fra faget.