

## MA1101 Grunnkurs i analyse 1

### Prosjekt Høst 2023

**Innleveringsfrist:** Onsdag 8. November, kl. 13:00

Prosjektet leveres som PDF i Inspera på enten Engelsk eller Norsk. Dere kan jobbe i par eller alene. Instruksjoner for innlevering: Gruppeinnlevering+i+Inspera. Hvis du leverer individuelt, må du være i en gruppe for deg selv. Skriv også ditt/deres kandidatnummer på toppen av dokumentet som du leverer inn.

Prosjektet er obligatorisk og teller 30% av karakteren i emnet. Dere skal svare på tre oppgaver. To av dem kan dere selv velge blant oppgave 1–4, mens alle må gjøre oppgave 5.

Legg frem rigorøse argumenter/utledninger. Tenk at du forklarer løsningene/begrepene for noen som kan matematikk, men ikke temaene du legger frem. Henviser du til resultater som er gitt i boken eller i forelesning, må dette spesifiseres.

**Velg to av oppgavene 1–4.**

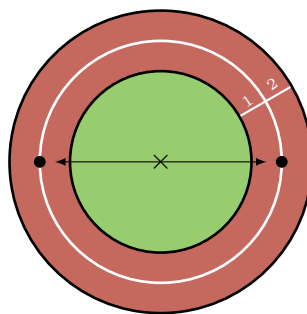
1

- a) La  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  være en kontinuerlig funksjon. Vis at det finnes en  $c \in [0, 1]$  slik at  $f(c) = c$ .

*Hint: Se på funksjonen  $g(x) = x - f(x)$ .*

- b) Du skal løpe én gang rundt en sirkulær bane. Vi antar at farten er null idet du starter og idet du går i mål. Vis at det alltid vil finnes to diametralt motsatte punkter i banen hvor farten er like stor.

*Merk: Farten er en kontinuerlig funksjon.*



Figur: Diametralt motsatte punkter.

2

- a) La  $f$  være en funksjon som er kontinuert i  $[a, b]$ , to ganger deriverbar på  $(a, b)$ , og der

$$f(a) = f(d) = f(b) = 0$$

for en  $d \in (a, b)$ . Vis at det da finnes en  $c \in (a, b)$  slik at  $f''(c) = 0$ .

- b) Anta at  $f$  er kontinuert i  $[a, b]$ , to ganger deriverbar i  $(a, b)$  og  $f''$  har nøyaktig ett nullpunkt i  $(a, b)$ . Vis at  $f(x)$  kan ha maksimalt tre nullpunkter i  $[a, b]$ .

3

Vi ser på funksjonen definert ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{hvis } x = 0. \end{cases}$$

Knut har avgjort at  $f$  ikke har en derivert for  $x = 0$ . Argumentasjonen hans står oppført under.

- a) Forklar hvorfor argumentasjonen til Knut ikke er gyldig.  
 b) Avgjør om  $f'(0)$  eksisterer. Gi enten et gyldig argument for at den ikke eksisterer eller finn  $f'(0)$ .

#### **Knut sitt argument**

Vi finner ved regneregler for den deriverte at

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

for  $x \neq 0$ . For å bestemme  $f'(0)$  ser vi på  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ . Vi observerer at

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

samt at  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  ikke eksisterer. Generelt har vi at hvis

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

eksisterer, men

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

ikke eksisterer, så vil ikke  $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x) + h(x))$  eksistere. Dermed konkluderer vi med at  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  ikke eksisterer, og da heller ikke  $f'(0)$ .

- c) Bestem om følgende utsagn er riktig: Dersom  $f$  er deriverbar i et åpent intervall  $(a, b)$ , og strengt avtagende i dette intervallet, så må  $f'(x) < 0$  for alle  $x$  i intervallet. Gi et bevis eller moteksempel.

4

En holme ligger 6 km fra strandkanten. 9 km fra det punktet på stranden som er nærmest holmen, ligger det en hytte. Hvis man ror med en fart av 3 km/t og går med en fart av 5 km/t, hva er den korteste tiden man kan bruke fra holmen til hytta?

**Husk:** Et gyldig svar må inkludere argumentasjon for hvorfor fremgangsmåten din gir korrekt svar.



Figur: Illustrasjon av hytta og holmen.

## Siste oppgave obligatorisk.

- 5 Identifiser tre matematiske begrep/resultater du har benyttet mens du løste de første oppgavene. Skriv en kort forklaring av dem og illustrer det med enkle eksempler.

Potensielle begrep:

- Grenseverdi
- Kontinuitet
- Derivert
- Maksimal-/ekstremalverdier
- Asymptoter

Potensielle resultat:

- Skvisregelen
- Kjernerregelen
- Ekstremalverdisetningen
- Middelvei-setningen
- Rolles teorem
- Skjæringssetningen

### Merk

Listen over er ikke absolutt. Dere kan velge andre begrep/resultater fra faget så lenge dere har brukt dem og dere forklarer dem godt. Sjekk eventuelt <https://wiki.math.ntnu.no/ma1101/2023h/tema> for flere begrep/temaer fra faget.