Oppgave 1 Hvilke av følgende utsagn er korrekte? Svar med «Sann» eller «Usann». *Begrunnelse trengs ikke på denne oppgaven.*

a) Hvis en deriverbar funksjon $f : [0,1] \to [0,1]$ har et maksimum i $x = 1/2$, så er $f'(1/2) = 0$.

b) Hvis $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ er en konvergent følge, kan ikke følgen $(1/a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergere.

c) Funksjonen $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definert ved $f(x) = x\sin(1/x)$ kan utvides til en kontinuerlig funksjon på $[0,1]$.

d) Hvis grensen $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ eksisterer, er f kontinuerlig i x.

e) Enhver kontinuerlig funksjon på $\mathbb{R}$ er begrenset.

f) Hvis en kontinuerlig funksjon f tilfredsstiller $0 < f(x) < \frac{1}{x}$ for alle $x \geq 1$, så konvergerer $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

g) Hvis en kontinuerlig funksjon f tilfredsstiller $f(x) > \frac{1}{x^2}$ for alle $x \geq 1$, så divergerer $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

h) Hvis $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ er en konvergent følge, så er $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{2n}| = 0$.

i) Hvis $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig på $(\varepsilon, 1)$ for hver $0 < \varepsilon < 1$, så er den kontinuerlig på hele $(0,1)$.

j) Det finnes reelle tall a, b, c slik at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cos(x)[ax^4 + bx^2 + c]\,dx = 2\pi.$$

Oppgave 2 La

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \qquad x > 0.$$

Bestem intervallene der f er voksende eller avtakende. Bestem også alle vertikale, horisontale, og skrå asymptoter til f. Lag en skisse av grafen til $y = f(x)$ med hjelp av dine svar. Finn det største verdiet som f antar.

Oppgave 3

a) Beregn Taylorpolynomet av grad 3 rundt punktet $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = xe^{-x}.$$

b) Ved å bruke Taylorpolynomet av grad 2 rundt punktet $x = 0$, finn en tilnærming til $f(0,1)$ med feil mindre enn $0,0005$.

Hint: Husk at

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Oppgave 4

a) Beregn $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^{2023} + 3n^9 + 2n^3 + 8}{2n^{2023} + n^7 + 8n^2 + 2}$

b) Beregn $\lim_{n\to\infty} n \tan \frac{1}{n}$.

c) Vis at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Hint: Sammenlign hver faktor i telleren med en faktor i nevneren.

Oppgave 5 Betrakt følgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, rekursivt definiert av at

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \; n \geq 1.$$

a) Vis ved hjelp av induksjon at følgen er voksende.

b) Vis ved hjelp av induksjon at følgen er begrenset.

c) Motiver at følgen er konvergent og beregn $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Oppgave 6

a) Beregn $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx.$

b) Beregn $\displaystyle\int_0^\infty \frac{4x}{x^2+3}\,dx.$

c) Beregn $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$ *Hint:* $x = \tan(u)$.

Oppgave 7

a) Vis med delvis integrasjon at

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1-\cos x}{x} + \int \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

b) Med utgangspunkt i formelen fra **a)**, vis at

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

er konvergent.