Oppgave 1 Hvilke av følgende utsagn er korrekte? Svar med «Sann» eller «Usann». *Begrunnelse trengs ikke på denne oppgaven.*

a) Hvis en kontinuerlig deriverbar funksjon f på $\mathbb{R}$ tilfredstiller at $f'(x) < 0$ for $x < 0$ og $f'(x) > 0$ for $x > 0$, må f ha et minimum ved $x = 0$.

b) Hver kontinuerlig og deriverbar funksjon på et åpent intervall (a, b) oppnår et maksimum.

c) Hvis $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mot 0 når $n \to \infty$, så er rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

d) Hvis f og g er kontinuerlige funksjoner på et intervall I, så er produktfunksjonen $h = fg$ også kontinuerlig på I.

e) Produktet av to diskontinuerlige funksjoner kan ikke være kontinuerlig.

f) Hvis en kontinuerlig funksjon f tilfredsstiller $0 < f(x) < \frac{1}{x^2}$ for alle $x \geq 1$, så konvergerer $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

g) Hvis en kontinuerlig funksjon f tilfredsstiller $f(x) > \frac{1}{x}$ for alle $x \geq 1$, så divergerer $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

h) Hvis en funksjon $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tilfredstiller $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ for en bestemt konstant $L > 0$ og alle $x, y \in \mathbb{R}$, så er f kontinuerlig.

i) Alle deriverbare funksjoner $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som tilfredstiller $f(x) = f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kan skrives $f(x) = Ce^x$ for en konstant $C \in \mathbb{R}$.

j) For ethvert $a \in \mathbb{R}$, eksisterer en funksjon f slik at $f(x) = -f(-x)$ og $\int_{-a}^{2a} f(x)\,dx = a$.

Oppgave 2 La

$$f(x) = xe^{1/x}, \; x \neq 0.$$

Bestem intervallene der f er voksende eller avtakende. Bestem også alle vertikale, horisontale, og skrå asymptoter til f. Lag en skisse av grafen til $y = f(x)$ med hjelp av dine svar.

Oppgave 3

a) Beregn Taylorpolynomet av grad 3 rundt punktet $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = \int_0^x \cos(\sin(t))\, dt.$$

b) Finn en tilnærming til $f(0,1)$ med feil mindre enn $0,0005$.

Hint: Husk at

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Oppgave 4

a) Beregn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2024} + 2n^9 + 4n^3 + n\sin n}{2n^{2024} + n^6 + 3n^2 + 2^{-n}}$

b) Beregn $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2n})$.

c) Vis at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n!}} = 0.$$

Hint: Sammenlign faktorer i telleren med faktorer i nevneren.

Oppgave 5 Betrakt følgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, rekursivt definiert av at $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, og at

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}, \qquad n \geq 2.$$

a) Forklar med ord hvordan følgen oppfører seg. Illustrer gjennom å tegne noen verdier av a_n.

b) Vis ved hjelp av induksjon at

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{3}{2^{j-1}}, \qquad n \geq 2.$$

Hint: I induksjonssteget kan det være til hjelp å bruke at

$$(-1)^{k-1}\frac{3}{2^k} = (-1)^{k-1}\frac{3}{2^{k-1}} + (-1)^k \frac{3}{2^k}.$$

c) Bruk formelen ovenfor for å vise at $\lim_{n\to\infty} a_n$ eksisterer.

Oppgave 6

a) Beregn $\int_3^5 xe^x \, dx$.

b) Beregn $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx$.

c) Beregn $\int_0^\pi \cos^2 x \sin^3 x \, dx$.

Oppgave 7 La $f\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ være en positiv, kontinuerlig funksjon, slik at $f(x) \le 1$ for $x \in [0,1]$. Anta videre at

$$f(x+1) \le \frac{f(x)}{2}, \qquad x \ge 0.$$

Vis at

$$\sup_{n\ge 1} \int_0^n f(x)\, dx < \infty,$$

og dermed at det uegentlige integralet

$$\int_0^\infty f(x)\, dx$$

konvergerer.
Hint: Hvor stor kan f være på $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$,…?