NTNU
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Øving 9
Høst 2023

Innleveringsfrist: Mandag 30. Oktober
Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

1 Fyll inn boksene så likhetene stemmer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}(2k+3) = \sum_{n=1}^{9} \boxed{}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{3} x^{3-n} = \sum_{m=\square}^{\square} x^m$

Løsning: Oppgave 1

a) Her jobber vi kun med et variableskifte. Vi ser at $n = k+1$ eller tilsvarende $k = n-1$.

$$\sum_{k=0}^{8}(2k+3) = \sum_{n=1}^{9}(2(n-1)+3) = \sum_{n=1}^{9}(2n+1)$$

b) Vi observerer at $x^{3-n} = x^m$ så $m = 3-n$. Når

$$n = 0 \quad \text{er} \quad m = 3-0 = 3,$$

og når

$$n = 3 \quad \text{er} \quad m = 3-3 = 0.$$

Indeksene i summen skal øke, så vi får dermed at nedre summegrense er $m = 0$ og øvre summegrense er $m = 3$. Altså får vi

$$\sum_{n=0}^{3} x^{3-n} = \sum_{m=0}^{3} x^m$$

2 Bevis følgende to likheter

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Løsning: Oppgave 2

a) Denne oppgaven skriker induksjon!

Grunnsteg For $n = 1$ får vi at

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

som er nettopp likheten vi behøver. Grunnsteget er sjekket ✔

Induksjonssteg Anta likheten stemmer for $n = k$, hvor $k > 0$ er ett vilkårlig positivt heltall. Altså antar vi at

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2.$$

Nå tar vi fatt på å vise at likheten stemmer for $n = k+1$, dvs. vi skal vise følgende likhet:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2-i) = (k+1)^2.$$

La oss manipulere summesiden litt; vi kan alltids dele en sum opp i to delsummer:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \left(\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\right) + (2(k+1)-1).$$

Høyresiden over kan vi nå ved hjelp av induksjonsantagelsen skrive om som

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\right) + (2(k+1)-1) &= k^2 + (2(k+1)-1)\\ &= k^2 + 2k + 1\\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

hvor vi i siste overgang brukte første konjugatsetning i revers. Vi har vist likheten for $n = k+1$, og ved induksjonsprinsippet er vi i mål. ✔

b) To prove this statement, we use induction.

Base Case For $n = 1$, the formula states that

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6},$$

which simplifies to $1 = 1$. The base case holds.

Inductive Step

Assume the formula holds for some arbitrary $n = k$, i.e.,

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

We must show that the formula also holds for $n = k+1$.

Consider the sum $\sum_{i=1}^{k+1} i^2$. This sum can be rewritten as $\sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$.

By the inductive hypothesis,

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

so we have

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

Simplifying, we find

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)((k+2)(2k+3))}{6} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.\end{aligned}$$

Thus, the formula holds for $n = k+1$ as well, completing the induction and proving the formula for all n.

3 Deriver funksjonene under og forenkl uttrykkene hvis mulig. Gi også definisjonsmengdene til de deriverte

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{(e^x)}$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2^{(x^2-3x+8)}$

Hint: Kjerneregel

Løsning: Oppgave 3

a) $f(x) = e^{(e^x)}$, $f'(x) = e^{(e^x)}e^x = e^{x+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x}$, $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = 2^{(x^2-3x+8)}$, $f'(x) = (2x-3)(\ln 2)2^{(x^2-3x+8)}$, $x \in \mathbb{R}$.

4 De hyperbolske trigonometriske funksjonene er definert som

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

I denne oppgaven skal vi utlede egenskaper til disse funksjonene.

a) Regn ut den første og andre deriverte til $y(x) = \sinh(x)$. Hva kan du si om

$$y''(x) - y(x)?$$

b) Vis at

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

c) Finn ett uttrykk for $\sinh^{-1}(x)$.

Løsning: Oppgave 4

a)

We compute

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sinh(x) &= \frac{e^x}{2} - \frac{-e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x), \\ \frac{d}{dx}\cosh(x) &= \frac{e^x}{2} + \frac{-e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x). \end{aligned}$$

Thus

$$y''(x) - y(x) = \sinh(x) - \sinh(x) = 0.$$

b) We compute

$$\begin{aligned} \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

c) We solve $y = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ for y as

$$2y = e^x - e^{-x} \implies 2ye^x = (e^x)^2 - 1.$$

Let $t = e^x$ so that the above can be written as

$$2yt = t^2 - 1 \implies t^2 - 2yt - 1 = 0 \implies t = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Note that the solution corresponding to the negative root is negative which $t = e^x$ never is since we assume $x \in \mathbb{R}$. We therefore choose the positive root for the inverse and take the logarithm to get x alone as

$$x = \sinh^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

5 Avgjør om de følgende utsagnene er **SANNE** eller **USANNE**. Hvis det er sant; bevis utsagnet. Hvis det er usant; gi ett moteksempel.

a) Hvis $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer så divergerer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

b) Hvis $a_n \geq c > 0$ for alle n så divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ til uendeligheten.

Løsning: Oppgave 5

a)

TRUE. A counterexample is $a_n = \frac{1}{n^2}$. The terms of $\frac{1}{a_n} = n^2$ do not converge to 0 as $n \to \infty$ and so $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ is divergent.

b)

TRUE. We have

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \geq c + c + c + \cdots + c = nc,$$

and $nc \to \infty$ as $n \to \infty$.

6 Finn summen av rekkene under, eller vis at rekkene divergerer.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$. *Hint: Geometrisk rekke.*

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + \cdots$

Hint: Bruk at $\displaystyle\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big)$ *og kanseller ut ledd.*

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

Hint: Sammenlign med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Løsning: Oppgave 6

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}} = 8e^3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^k = \frac{8e^3}{1-\frac{2}{e}} = \frac{8e^4}{e-2}.$$

b)

Let

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + \cdots .$$

Since

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big),$$

the partial sum is

$$\begin{aligned} s_n =& \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\Big) + \cdots + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\Big) \\ =& \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big). \end{aligned}$$

Hence,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}.$$

c)

Since $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$, therefore the partial sums of the given series exceed half those of the divergent harmonic series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$. Hence the given series diverges to infinity.

$\boxed{7}$ I denne oppgaven skal vi vise at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer ved hjelp av Cauchy-følger.

a) Forklar hvorfor

$$\lim_{N,M\to\infty} \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n^2} = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

b) Bevis at

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$

c) Sammenlign

$$\sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n^2}$$

med de delvise summene i oppgave 6 b) og vis at verdien går mot 0 når $M, N \to \infty$.

Løsning: Oppgave 7

a) Let s_N be the N :th partial sum of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. The sum is finite if the partial sums converge and if the sequence $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ is a Cauchy seqeuence, it in particular converges.

b) The right hand side can be rewritten as

$$\frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{4}{4n^2-1} \geq \frac{4}{4n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

c) From **b)** we have that

$$\sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n^2} \leq 4 \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = 4(S_N - S_M)$$

where S_N is the N:th partial sum of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ which we showed was equal to $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$. Hence we have that

$$\lim_{M,N\to\infty} \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n^2} \leq \lim_{M,N\to\infty} 4\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2M+1}\right)\right] = 0.$$