NTNU
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Øving 8
Høst 2023

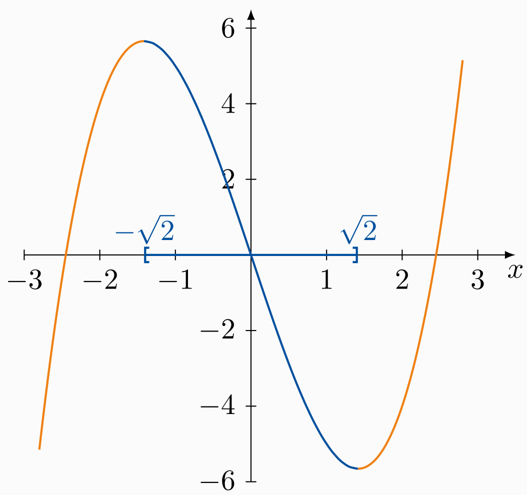
Innleveringsfrist: Mandag 23. Oktober
Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

$\boxed{1}$ Funksjonen f er gitt ved
$$f(x) = x^3 - 6x.$$
Bestem det største intervallet $I = [a, b]$ slik at $1 \in I$ og f er injektiv på I.

Løsning: Oppgave 1

Det er ikke altfor mye vi kan gjøre med funksjonen, men vi kan bemerke oss at enhver strengt monoton funksjon er injektiv. Derfor velger vi å derivere og sjekke hvor funksjonen er strengt monoton.
$$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$$
Vi kan se ved fortegnsdrøfting av f' at f er strengt avtagende på intervallet $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ og strengt voksende på intervallene $(-\infty, -\sqrt{2}]$ og $[\sqrt{2}, \infty)$. Funksjonen er dermed injektiv hvis man restrikterer til ett av disse intervallene.

Det er kun ett av disse intervallene som inneholder 1, så vi kan tro $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ er svaret vi er ute etter, og det er korrekt. Hvis man skulle vært tverr kunne man kverulert og spurt om man kunne utvidet dette intervallet på én eller begge sider; svaret er nei, dere kan selv tenke over hvordan dere kan rettferdiggjøre det svaret.



$\boxed{2}$ Funksjonen f er definert for $x \geq -3$ som

$$f(x) = x^4 - b \cdot x^3 + 2.$$

For hvilke verdier av b er f injektiv?

Løsning: Oppgave 2

Det er ikke altfor mye vi kan gjøre med funksjonen, men vi kan bemerke oss at enhver strengt monoton funksjon er injektiv. Derfor velger vi å derivere og sjekke for hvilke b vi får at f er strengt monoton.

$$f'(x) = 4x^3 - 3bx^2 = 4x^2(x - \tfrac{3}{4}b)$$

Fortegnet til $f'(x)$ er gitt ved fortegnene til x^2 og $(x - \frac{3}{4}b)$. x^2 er positiv for alle $x \neq 0$, mens $(x - \frac{3}{4}b)$ er negativ for $x < \frac{3}{4}b$ og positiv for alle $x > \frac{3}{4}b$.

Først kan vi observere at hvis $\frac{3}{4}b > -3$ så vil funksjonen f være strengt avtagende på intervallet $[-3, \frac{3}{4}b]$ og strengt voksende på intervallet $[\frac{3}{4}b, \infty)$, og siden vi kan se at f er kontinuerlig vil den dermed ikke være injektiv.

Nå kan vi se på hva som skjer når $\frac{3}{4}b \leq -3$. Da vil f være strengt voksende på hele definisjonsmengden, $[-3, \infty)$, og dermed også injektiv.

Vårt svar blir dermed at for $\frac{3}{4}b \leq -3$ eller tilsvarende $b \leq -4$, vil funksjonen være injektiv.

$\boxed{3}$ Vis at funksjonene f under er injektive, og finn inversfunksjonen f^{-1}. Spesifiser definisjons- og verdimengden til f^{-1}.

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ for $x \in [1, \infty)$,

b) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ for $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Løsning: Oppgave 3

a) Funksjonen vi lurer på er gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x-1}.$$

La oss benytte oss av kravet $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ for argumentasjonen.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\iff \sqrt{x_1 - 1} = \sqrt{x_2 - 1}, \quad (x_1, x_2 \geq 1) \\ &\iff x_1 - 1 = x_2 - 1 = 0 \\ &\iff x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Altså er f injektiv. Vi vil finne funksjonen f^{-1} som er gitt ved at $f^{-1}(f(x)) = x$. Først kan vi notere oss at per definisjon skal $D_f = V_{f^{-1}}$ og $V_f = D_{f^{-1}}$, dermed får vi

$$D_{f^{-1}} = V_f = [0, \infty), \qquad \text{og } V_{f^{-1}} = D_{f^{-1}} = [1, \infty)$$

Enkleste måten å finne f^{-1} er å sette opp likningen

$$y = f(x) = \sqrt{x-1}$$

og løse for x.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x-1} \\ &\Updownarrow \;\; (x \geq 1, y \geq 0) \\ y^2 &= x - 1 \\ &\Updownarrow \\ x &= y^2 + 1 \end{aligned}$$

Altså får vi $f^{-1}(y) = y^2 + 1$. Vi kan dobbeltsjekke at vi fikk korrekt svar ved å sjekke at

- $f^{-1}(f(x)) = x$ for alle $x \in D_f$ og
- $f(f^{-1}(x)) = x$ for alle $x \in D_{f^{-1}}$

Vi begynner med første likhet:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x$$

siden $1 \leq x \in D_f$ er $\sqrt{x-1}$ definert. Dermed er første likhet tilfredstilt. Nå til andre

$$f(f^{-1}(x)) = f(x^2+1) = \sqrt{(x^2+1)-1} = x$$

hvor likheten er korrekt siden $0 \leq x \in D_{f^{-1}}$.

b) Funksjonen vi lurer på er gitt ved

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Vi benytter oss av samme krav som i a). Så la oss anta at vi har $x_1, x_2 \in D_f$ slik at $f(x_1) = f(x_2)$. Det betyr spesielt at

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{1+x_1} &= \frac{x_2}{1+x_2} \\ &\Updownarrow \;\; (x_1, x_2 \neq 0) \\ (1+x_2)x_1 &= (1+x_1)x_2 \\ &\Updownarrow \\ x_1 + x_1x_2 &= x_2 + x_1x_2 \\ &\Updownarrow \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Altså er f injektiv. Her er det ikke like klart hva verdimengden til f er med en gang, og vi vil spesielt kunne finne verdimengden ved å først finne uttrykket for f^{-1}. Vi tar dermed uttrykket for inversfunksjonen først, i motsetning til i **a)**.

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= \frac{x}{1+x} \\ (1+x)y &= x \\ y + yx &= x \\ x - yx &= y \\ x(1-y) &= y \\ x &= \frac{y}{1-y} \end{aligned}$$

Dermed får vi $f^{-1} = \frac{y}{1-y}$, denne er definert for alle $y \neq 1$. Altså har vi

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

og

$$V_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty).$$

$\boxed{4}$ I forkant av **Teorem 2.11.1** påstår boken at strengt monotone funksjoner opplagt er injektive. La oss likevel koste på oss et argument for det strengt voksende tilfellet.

Bevis at en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er strengt voksende er injektiv.

Løsning: Oppgave 4

Direkte bevis:
Her kan vi bevise direkte. Hvis vi kan vise at enhver $y \in V_f$ kun har én verdi $a \in D_f$ slik at $f(a) = y$ så er vi i mål. Det at en slik a eksisterer i det hele tatt følger fra definisjonen av verdimengden. La nå $b \in D_f$ være ulik a. Nødvendigvis må enten $a < b$ eller $b < a$. Det første gir oss $y = f(a) < f(b)$ siden f er strengt voksende, og det andre gir oss $f(b) < f(a) = y$, i begge tilfeller får vi $f(b) \neq f(a) = y$. Altså er det kun én verdi $a \in D_f$ som tilfredstiller $f(a) = y$.

Bevis ved selvmotsigelse:
Vi skal bevise påstanden ved hjelp av selvmotsigelse. Her har vi en påstand av typen "**A** $\implies$ **B**". Vi skal dermed anta **A** og **ikke B**, og vise at vi da får en absurditet. Vi identifiserer først **A**, **B** og **ikke B**:

A: Funksjonen f er strengt voksende.

B: f er injektiv, eller ekvivalent: Hvis $x_1, x_2 \in D_f$ er slik at $f(x_1) = f(x_2)$ så må nødvendigvis $x_1 = x_2$.

ikke B: f er ikke injektiv, eller ekvivalent: Det eksisterer $x_1, x_2 \in D_f$ slik at $x_1 \neq x_2$ og $f(x_1) = f(x_2)$.

Vi jobber dermed med antagelsen om at f er strengt voksende og at vi kan finne $x_1, x_2 \in D_f$ slik at $x_1 \neq x_2$ og $f(x_1) = f(x_2)$. Vi kan godt anta at $x_1 < x_2$, siden vi ellers bare kunne byttet om på navnene. Det følger dermed at $f(x_1) < f(x_2)$ fra antagelsen om at f er strengt voksende, men dette kan ikke stemme likt med at $f(x_1) = f(x_2)$ så vi har oppnådd en selvmotsigelse.

5 Finn lineariseringen av

$$f(x) = \sqrt{3 + x^2} \quad \text{i} \quad x = 1.$$

Hint: Dette er Taylorpolynomet av grad 1

Løsning: Oppgave 5

$$f(1) = 2, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(3 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x(3 + x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad f'(1) = \frac{1}{2}.$$

Thus, the linearization of f about $x = 1$ is

$$L(x) = 2 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

6 Bruk et Taylorpolynom for å tilnærme sin(1) med feil mindre enn 0.05.

Løsning: Oppgave 6

Recall that the error of a Taylor polynomial approximation of order n is given by

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

where the Taylor series is centered at a and c is between x and a. In our case, all the derivatives of sin are bounded by 1 so $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$, $a = 0$ and $x = 1$. Hence

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

To make this quantity smaller than 0.05 we can choose $n = 3$ which yields

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} \implies T_3(1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx \sin(1).$$

7 I denne oppgaven skal vi finne den deriverte av arcsin, inversfunksjonen til sin (ofte også skrevet som $\sin^{-1}$).

a) Sinusfunksjonen, sin, er ikke injektiv på $\mathbb{R}$; finn ett symmetrisk interval I rundt null som vi kan begrense funksjonen til, hvor den er injektiv og har verdimengde $(-1, 1)$.

b) Nå som vi har at $\sin\colon I \to (-1, 1)$ er injektiv, kan vi definere $\arcsin\colon (-1, 1) \to I$. La $y = \sin(x)$ og bruk at

$$x = \arcsin(y) = \arcsin(\sin(x))$$

til å derivere med hensyn på x. Sett inn $y = \sin(x)$, og skriv om til å gi ett uttrykk for $\arcsin'(x)$.

Løsning: Oppgave 7

a) By inspecting the graph of $\sin(x)$ we see that the suitable interval is $(-\pi/2, \pi/2)$ as this is the largest neighborhood of 0 on which $\sin(x)$ is increasing.
b) Taking the derivative, we get

$$1 = \arcsin'(\sin(x)) \cos(x).$$

Since $\cos(x) = \sqrt{1 - y^2}$ when $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, we get

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

$\boxed{8}$ Vi har benyttet Taylorpolynomer til å tilnærme funksjoner, vi skal nå vise at Taylorpolynomer tilnærmer polynomer **perfekt**.

a) La $p_1(x) = ax + b$ og finn Taylorpolynomet av grad 1 i $x_0 = 0$.

b) La $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ og finn Taylorpolynomet av grad 1 i $x_0 = 0$.

c) La $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ være et polynom. Vis at Taylorrekken i $x_0 = 0$ av $p_n(x)$ er lik $p_n(x)$.

d) Hva tror du ville skjedd om vi fant Taylorpolynomet i et annet punkt $x_0 \neq 0$? (ingen begrunnelse nødvendig)

Løsning: Oppgave 8

We write out the proof for **c)** and note that **a)** and **b)** follow from it. To compute the Taylor polynomial, we need the derivatives which are

$$\begin{aligned}
p_n^{(1)}(x) &= a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_2 2x + a_1, \\
p_n^{(2)}(x) &= a_n n(n-1)x^{n-2} + a_{n-1}(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_3 \cdot 3 \cdot 2x + 2a_2, \\
&\vdots \\
p_n^{(n)}(x) &= a_n n(n-1) \cdots (n-(n-1)) = a_n n!.
\end{aligned}$$

Plugging in $x = 0$ yields

$$p_n^{(1)}(0) = 1!a_1, \quad p_n^{(2)}(0) = 2!a_2, \quad p_n^{(3)}(0) = 3!a_3, \quad \cdots, \quad p_n^{(n)}(0) = n!a_n.$$

Hence we can write the Taylor polynomial as

$$\begin{aligned} p(0) + \frac{p'(0)}{1!}(x-0) + \frac{p''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \cdots \\ = a_0 + \frac{1!a_1}{1!}x + \frac{2!a_2}{2!}x^2 + \frac{3!a_3}{3!}x^3 + \cdots \frac{n!a_n}{n!}x^n + 0 + 0 + \cdots \\ = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = p_n(x). \end{aligned}$$

If we were to compute the Taylor polynomial in a different point we would obtain a different polynomial in the same way that $(x+1)^2 + (x+1) + 0 = x^2 + 3x + 3$.