Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

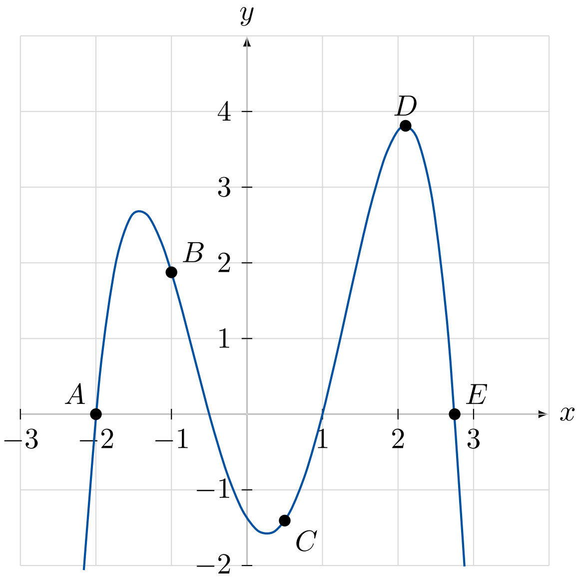
Løsningsforslag Øving 7

Høst 2023

Innleveringsfrist: Mandag 16. Oktober
Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

$\boxed{1}$ Grafen til en tre ganger deriverbar funksjon f er skissert under. Angi i hvilke av punktene A, B, C, D og E vi har at $f(x) > f'(x)$.

(Utfordring) Kan du avgjøre om $f'(x) > f''(x)$ i noen av disse punktene?



Løsning: Oppgave 1

For svaret sin del skriver vi

$$A = (a, f(a)),\ B = (b, f(b)),\ C = (c, f(c)),\ D = (d, f(d) \ \text{ og } \ E = (e, f(e)).$$

Merk: Løsningsforslag er en hel del mer utfyllende enn forventet svar.
Både f' og f'' er kontinuerlige (f er tross alt tre ganger deriverbar). Vi kan observere at funksjonen har ett lokalt maksimalpunkt mellom A og B, og et globalt maksimaltpunkt i D. Videre ser vi at funksjonen har ett lokalt minimalpunkt mellom B og C.

La oss igjen repetere et resultat fra boken

Teorem 2.7.6 – Den deriverte bestemmer monotonitet

Anta f er kontinuerlig på intervallet I.

- Hvis $f'(x) > 0$ på det indre av I, så er f strengt voksende på I.
- Hvis $f'(x) < 0$ på det indre av I, så er f strengt voksende på I.

Vi observerer at f vokser i en omegn om punktet A, så f' er ikke negativ her. Hadde $f'(a) = 0$, ville vi nødvendigvis ha sett en utflatning av grafen til f rundt A, og siden dette ikke er tilfelle kan vi konkludere med at $f'(a) > 0$. Dermed $f(a) = 0 < f'(a)$.

Vi kan tilsvarende se at $f'(b) < 0$, $f'(c) > 0$ og $f'(e) < 0$. Altså får vi

$$f'(b) < 0 < f(b), \quad f'(c) > 0 > f(c) \quad \text{og} \quad f'(e) < 0 = f(e).$$

For punktet D benytter vi oss av

Teorem 2.7.1 – Test for lokale ekstremalpunkter

La a være et punkt i det indre av D_f, og anta at f er deriverbar i a. Hvis $x = a$ er et lokalt ekstremalpunkt for f så er $f'(a) = 0$.

Altså har vi $f'(d) = 0 < f(d)$.

Svaret på oppgavens første spørsmål blir dermed: B, D og E.

Nå til oppgavens siste spørsmål. Vi repeterer ennå ett resultat

Teorem 2.9.1 – Den andrederiverte bestemmer krumningen

Anta f' er kontinuerlig på intervallet I.

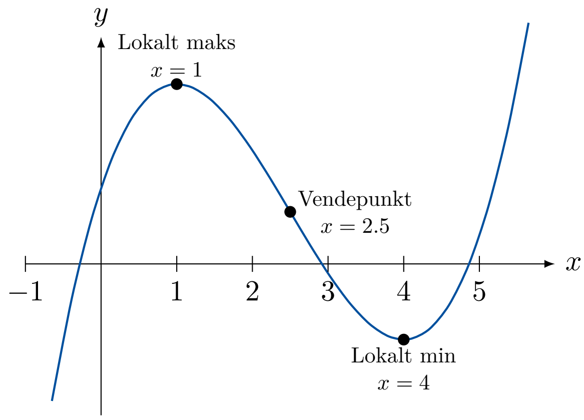
- Hvis $f''(x) > 0$ på det indre av I, så er f strengt konveks på I.
- Hvis $f''(x) < 0$ på det indre av I, så er f strengt konkav på I.

Her er det ikke like lett å observere fra grafen, men vi kan forhåpentligvis akseptere at f er konkav på et intervall som inneholder a og b, konveks på et intervall som inneholder c, og konkav på et intervall som inneholder d og e.

Vi påstår at $f''(a) < 0$ og $f''(b) < 0$. I alle andre tilfeller ville kontinuiteten til f'' enten tvunget grafen til å ha motsatt krumning eller ingen krumning overhodet på et område innenfor $[a, b]$. Tilsvarende kan vi argumentere for at $f''(c) > 0$, samt at $f''(d) < 0$ og $f''(e) < 0$. Altså kan vi se at i alle fall

$$f''(a) < 0 < f'(a) \quad \text{og} \quad f''(d) < 0 = f'(d).$$

$\boxed{2}$ Grafen til en kontinuerlig funksjon f er skissert under. Du får oppgitt at både f' og f'' eksisterer og er kontinuerlige. Finn nullpunktene til f' og f'', og angi fortegnene deres.

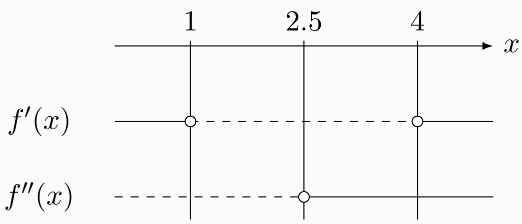


Løsning: Oppgave 2

Ut i fra skissen kan vi konkludere med at $f'(x)$ har nullpunkter i $x = 1$ og $x = 4$ (Teorem 2.7.1) og $f''(x)$ har nullpunkt i $x = 2.5$.

La oss argumentere litt nøyere for nullpunktet til $f''(x)$. Vi påstår at f er konkav på $(-\infty, 2.5]$ og konveks på $[2.5, \infty)$. Nødvendigvis må $f''(x) < 0$ for $x \in (-\infty, 2.5)$, siden vi ellers ville hatt ingen krumning eller motsatt krumning på et område innenfor her. Tilsvarende må $f''(x) > 0$ for $x \in (2.5, \infty)$. Nullpunktet følger nå fra skjæringssetningen.

Fortegnene later til å være gitt ved følgende fortegnsskjema



$\boxed{3}$ Klassifiser de kritiske punktene til funksjonen

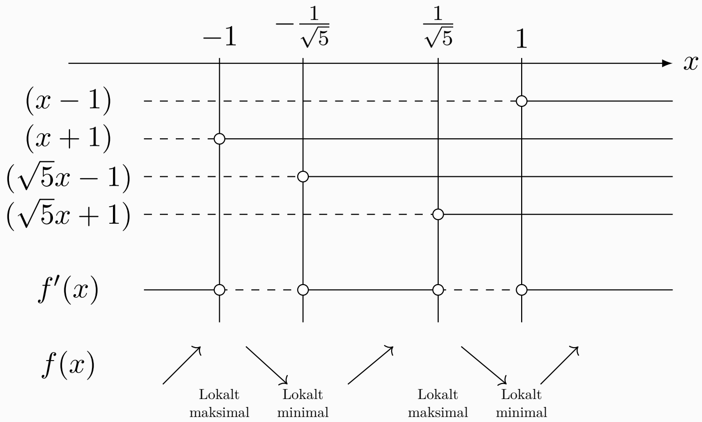
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x(x^2 - 1)^2.$$

(Dvs. finn de kritiske punktene og avgjør om de er lokale/globale topp-/bunnpunkt eller ikke.)

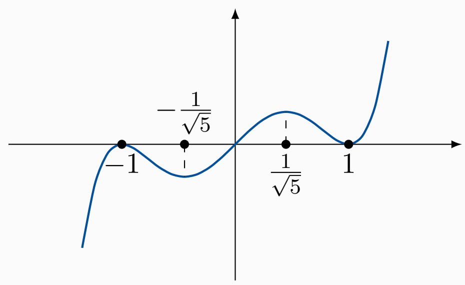
Løsning: Oppgave 3

$$
\begin{aligned}
f(x) =& x(x^2-1)^2,\\
f'(x) =& (x^2-1)^2 + 2x(x^2-1)2x\\
=& (x^2-1)(x^2-1+4x^2)\\
=& (x^2-1)(5x^2-1)\\
=& (x-1)(x+1)(\sqrt{5}x-1)(\sqrt{5}x+1).
\end{aligned}
$$

Funksjonen har følgende kritiske punkter $x=-1,\ x=1,\ x=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ og $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Vi benytter oss av fortegnsskjema til den deriverte for å klassifisere dem.



Vi har fått at -1 er ett lokalt makspunkt, $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ er ett lokalt minpunkt, $\frac{1}{\sqrt{5}}$ er ett lokalt makspukt og 1 er ett lokalt minpunkt. Det er ingen globale ekstremalpunkter.



$\boxed{4}$ Skisser grafen til funksjonen

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Lag en tabell med fortegnene til f' og f'', og den tilhørende oppførselen til f. Beskriv asymptotene til f (Se Kapittel 2.4 og 2.24 for bakgrunnskunnskap om asymptoter om nødvendig)

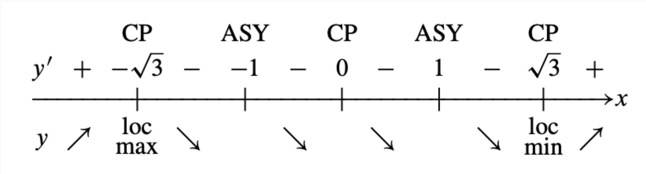
Løsning: Oppgave 4

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}, \quad f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

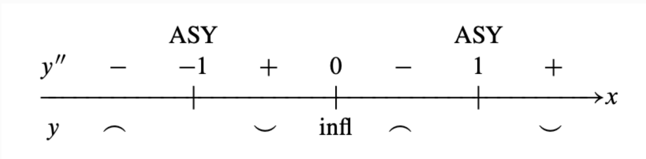
From f : Intercept: $(0,0)$. Asymptotes: $x = \pm 1$ (vertical), $y = x$ (oblique). Other points: $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

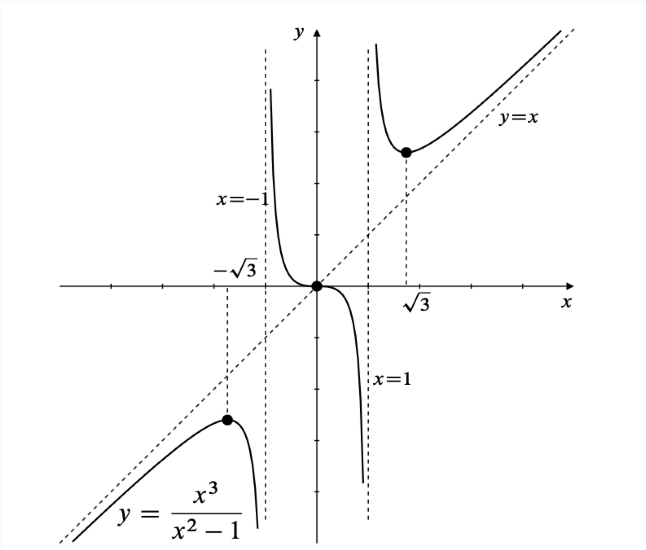
For computing the oblique asymptotes: We may write $f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$. When x tends to $\pm\infty$, it behaves like the $y = x$.

From $f'(x)$: Critical point: $x = 0$, $\pm\sqrt{3}$.

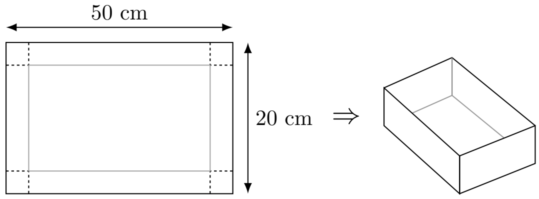


From $f''(x)$: $f''(x) = 0$ at $x = 0$.

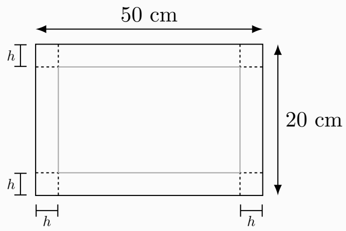




$\boxed{5}$ Vi har et stykke papp med målene 50 cm og 20 cm. Av dette skal vi kutte ut hjørnene og brette opp sidene for å forme en boks. Avgjør høyden på boksen som gir størst volum.



Løsning: Oppgave 5



Letting h denote the height of of our box, the side lengths will be

$$50 - 2h \qquad \text{and} \qquad 20 - 2h.$$

Hence the total volume will be

$$V(h) = h(50 - 2h)(20 - 2h) = 4h^3 - 140h^2 + 1000h.$$

The derivative is

$$V'(h) = 12h^2 - 280h + 1000$$

which has zeros when

$$h = \frac{35}{3} \pm \frac{5\sqrt{19}}{3}.$$

The larger one is nonphysical in the sense that $50 - 2h$ has to be positive. Hence the height of the box that will give the maximum volume must be

$$h = \frac{35}{3} - \frac{5\sqrt{19}}{3}.$$

6 Regn ut

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x + \ln(x) + 2x^3}{x^3}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x^2 \sin(x)}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^8 + e^{-x}}{\sqrt{x^{16} + \sin(x) + 2}}$

Løsning: Oppgave 6

a) Using L'Hôpital's rule, we have

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x + \ln(x) + 2x^3}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{1}{x} + 6x^2}{3x^2} = 2.$$

b)

Using L'Hôpital's rule, we have

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x^2 \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{2x\sin(x) + x^2\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}{2x\sin(x) + x^2\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x\cos^2(x)\left[2\sin(x) + x\cos(x)\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2\sin(x) + x\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2\cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

c)

By dividing by x^8 we get

$$\frac{x^8 + e^{-x}}{\sqrt{x^{16} + \sin(x) + 2}} = \frac{1 + \frac{e^{-x}}{x^8}}{\sqrt{1 + \frac{\sin(x)}{x^{16}} + \frac{2}{x^{16}}}}.$$

Here we clearly see that both the numerator and denominator approach 1 as $x \to \infty$ and hence the limit is 1.

$\boxed{7}$ Regn ut

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$, for $a, b > 0$.

b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$, gitt at f er to ganger deriverbar.

Løsning: Oppgave 7

a) Method 1: Using L'Hôpital's rule, we have

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cos(ax)}{b\cos(bx)} = \frac{a}{b}.$$

Method 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(ax)}{ax}\cdot ax}{\frac{\sin(bx)}{bx}\cdot bx} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1} = \frac{a}{b}.$$

b)

Using L'Hôpital's rule twice, we get

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)+f''(x-h)}{2} = \frac{2f''(x)}{2} = f''(x).$$

$\boxed{8}$ Finn de eventuelle asymptotene til

$$f(x) = 3x+2-\sqrt{|x^2+x|}.$$

Løsning: Oppgave 8

Merk: for alle $x \in \mathbb{R}\setminus(-1,0)$ vil funksjonen være gitt ved $f(x) = 3x+2-\sqrt{x^2+x}$.

There are clearly no horizontal or vertical asymptotes of this function so we look for linear ones (skråasymptoter). As $x \to \pm\infty$, $\sqrt{x^2+x}$ behaves as $|x|$ and so in the positive x direction, we have that asymptote $2x+b_+$ and in the negative x direction we have the asymptote $4x+b_-$. To find the value of b_+, we compute the limit

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to\infty} x-\sqrt{x^2+x}+2 = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}+2 = 1.5$$

using L'Hopitals rule. Hence this asymptote is

$$y = 2x+1.5.$$

Meanwhile in the negative x direction, we have

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-4x = \lim_{x\to-\infty} -x-\sqrt{x^2+x}+2 = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}+2 = 2.5$$

which yields the asymptote

$$y = 4x+2.5.$$

$\boxed{9}$ La $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ være en deriverbar funksjon. Anta f skjærer linjen $y = ax+b$ i tre punkter. Vis at det finnes minst to punkter x der $f'(x) = a$.
Hint: Se på $f(x)-ax-b$ og bruk Rolles teorem.

Løsning: Oppgave 9

Equivalently, we can show that there are two points $x \in \mathbb{R}$ such that

$$g(x) = f(x) - ax - b$$

has $g'(x) = 0$ where it holds that g has 3 zeros. Let $z_1 < z_2 < z_3$ be the three distinct zeros and apply Rolle's theorem to the intervals $[z_1, z_2]$ and $[z_2, z_3]$ to find the two points where the derivative is zero.