

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Øving 5

Høst 2023

Innleveringsfrist: Mandag 2. Oktober

Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

1] Finn likningene på formen $y = kx + m$ for tangenten i punktet x_0 til

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 9$

b) $y = \frac{1}{x^2+1}$, $x_0 = 0$.

Løsning: Oppgave 1

a) The slope of $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ at $x_0 = 9$ is

$$\begin{aligned} k &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\sqrt{9+h}} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9+h}}{3h\sqrt{9+h}} \cdot \frac{3 + \sqrt{9+h}}{3 + \sqrt{9+h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 - 9 - h}{3h\sqrt{9+h}(3 + \sqrt{9+h})} \\ &= -\frac{1}{54}. \end{aligned}$$

The tangent line at $(9, \frac{1}{3})$ is $y = \frac{1}{3} - \frac{1}{54}(x - 9)$, i.e. $y = -\frac{1}{54}x + \frac{1}{2}$.

b) The slope of $y = \frac{1}{x^2+1}$ at $x_0 = 0$ is

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h^2+1} - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h^2+1} = 0.$$

The tangent line at $(0, 1)$ is $y = 1$.

2] Skriv ned hva du tenker er en fornuftig definisjon for

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

Løsning: Oppgave 2

For each $M > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that

$$a - \delta < x < a \implies f(x) < -M.$$

3 I denne oppgaven viser vi at hvis $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert, tilfredstiller $f(x) > 0$ for alle $x \geq 0$ og $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, så oppnår f sitt maksimum.

a) Vis at for alle $x_0 > 0$ kan vi finne $K > 0$ slik at

$$x > K \implies f(x) < f(x_0).$$

b) Rettferdiggjør hvorfor dette betyr at

$$\sup_{x \geq 0} f(x) = \sup_{0 \leq x \leq K} f(x).$$

c) Bruk ekstermalverditeoremet for å konkludere med at

$$\sup_{x \geq 0} f(x) = \max_{0 \leq x \leq K} f(x).$$

Løsning: Oppgave 3

a)

Since $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, we can for any $\varepsilon > 0$ find a K such that $|f(x)| < \varepsilon$ for $x > K$. In particular, since $f(x) > 0$ for all x , we have that if $x_0 > 0$, $f(x_0) > 0$ and we can set $\varepsilon = f(x_0)$ to obtain the desired K . That $f(x) < \varepsilon = f(x_0)$ for $x > K$.

b)

We have that

$$\sup_{x \geq 0} f(x) = \max \left\{ \underbrace{\sup_{0 \leq x \leq K} f(x)}_{\geq f(x_0)}, \underbrace{\sup_{K < x < \infty} f(x)}_{< f(x_0)} \right\}$$

by a).

c)

The extreme value theorem says that a continuous function on a compact domain attains its maximum. Since $[0, K]$ is compact we apply it and get

$$\sup_{x \geq 0} f(x) = \sup_{0 \leq x \leq K} f(x) = \max_{0 \leq x \leq K} f(x)$$

as desired.

4 Regn ut, ved hjelp av definisjonen, den deriverte til følgende funksjoner

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + 4x - 5x^2$

b) $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + \frac{1}{x}$

c) $h: (-1, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$

Bestem også den maksimale naturlige definisjonsmengden til funksjonene f', g' og h' .

Løsning: Oppgave 4

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 4x - 5x^2. \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 4(x+h) - 5(x+h)^2 - (1 + 4x - 5x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h - 10xh - 5h^2}{h} = 4 - 10x. \end{aligned}$$

The maximal domain is $x \in \mathbb{R}$.

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= x + \frac{1}{x}. \\ g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h + \frac{1}{x+h} - x - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x-x-h}{h(x+h)x} \right) \\ &= 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} = 1 - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

The maximal domain is $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c)

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x}}. \\ h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x+h}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x+h}}{h\sqrt{1+x+h}\sqrt{1+x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+x-1-x-h}{h\sqrt{1+x+h}\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x+h})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{\sqrt{1+x+h}\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x+h})} \\ &= -\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

The maximal domain is $x > -1$.

- 5] Vis at kurven $y = x^2$ og den rette linjen $x + 4y = 18$ skjærer hverandre med en rett vinkel i ett av deres to skjæringspunkt.

Hint: To linjer skjærer hverandre med rett vinkel hvis produktet av stigningstallet deres er -1 .

Løsning: Oppgave 5

The intersection points of $y = x^2$ and $x + 4y = 18$ satisfy

$$\begin{aligned}4x^2 + x - 18 &= 0 \\(4x + 9)(x - 2) &= 0.\end{aligned}$$

Therefore $x = -\frac{9}{4}$ or $x = 2$.

The slope of $y = x^2$ is $k_1 = 2x$.

At $x = -\frac{9}{4}$, $k_1 = -\frac{9}{2}$. At $x = 2$, $k_1 = 4$.

The slope of $x + 4y = 18$, i.e. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{18}{4}$, is $k_2 = -\frac{1}{4}$.

Thus, at $x = 2$, the product of these slopes is $4 \cdot (-\frac{1}{4}) = -1$. So, the curve and line intersect at right angles at that point.

6 Bruk faktorisering av kubisk differanse

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

til å vise at

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0,$$

ved hjelp av definisjonen til den deriverte.

Løsning: Oppgave 6

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^{\frac{1}{3}}. \\
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h} \\
 &\quad \times \frac{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h[(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}]} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\
 &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0.
 \end{aligned}$$

- 7] Anta at f er kontinuerlig på $[-2, 3]$ og $f(-2) = 5$, $f(3) = -5$. Vis at f har ett nullpunkt ett sted i $(-2, 3)$.

Løsning: Oppgave 7

This follows from the intermediate value theorem applied to the interval $I = [a, b] = [-2, 3]$ since

$$\min\{-5, 5\} < 0 < \max\{-5, 5\}.$$

- 8] Anta $f(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$. For de følgende påstandene, hvis sant, gi et argument; hvis usant, gi et motbevis.

- a) Hvis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ eksisterer, så er $f(0) = 0$.
- b) Hvis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ eksisterer, så er $f(0) = 0$.
- c) Hvis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ eksisterer, så eksisterer $f'(0)$.
- d) Hvis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ eksisterer, så eksisterer $f'(0)$.

Løsning: Oppgave 8

In **a)** and **b)**, since the limitation of denominator is 0, so the limit of numerator must also be 0, then we have $f(0) = 0$. Thus **a)** and **b)** are TRUE.

In **c)**, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ exists, then $f(0) = 0$, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, so $f'(0)$

exists. **c)** is TRUE.

In **d)**, take $f(x) = |x|$, then

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 0,$$

but $f(x)$ is not differentiable at $x = 0$. So **d)** is FALSE.