NTNU
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Øving 4
Høst 2023

Innleveringsfrist: Mandag 25. September
Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

$\boxed{1}$ Beregn grenseverdien eller forklar hvorfor den ikke eksisterer.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{|x-a|}{x^2-a^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin(x)}{x^2+\cos(x)}$

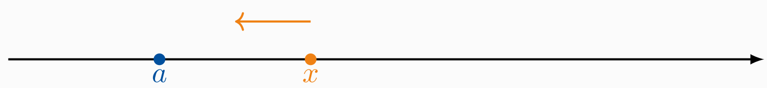
d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

Løsning: Oppgave 1

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \infty.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{|x-a|}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a^+} \frac{x-a}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a^+} \frac{x-a}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}.$

For å løse opp absoluttverdien har vi observert at vi beregner høyre grenseverdi. Det vil da si at x nærmer seg a fra høyre, og dermed $x > a$. Vi har generelt at hvis $b > c$ så er $|b-c| = b-c > 0$.



c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin(x)}{x^2+\cos(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin(x)}{x^2}}{1+\frac{\cos(x)}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$

Vi har her brukt at

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} = 0$$

(og tilsvarende for cosinus), siden telleren er begrenset ($-1 \leq \sin(x) \leq 1$), mens nevneren øker ubegrenset.

d) Vi beregner grensen for uttrykket når x går mot $-\infty$, så vi kan godt regne med at x er et negativt tall, og mer spesifikt at $x < -2$, dermed er $x^2+2x > 0$ (så $\sqrt{x^2+2x}$

er definert) og $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Dermed får vi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-2x}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)\cdot 1 \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{(-x)\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right]} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{(-1)\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right]} \\
&= -\frac{4}{2} = -2
\end{aligned}$$

hvor vi brukte at

$$1 = \frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}.$$

$\boxed{2}$ La f være en odde funksjon slik at $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$, vis at $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -L$.

Løsning: Oppgave 2

Hvis f er en odde funksjon, så må $f(-x) = -f(x)$. Altså,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\lim_{x\to 0^-} f(-x) = -\lim_{x\to 0+} f(x) = -L.$$

Hvis vi ikke tenker oss om her kan vi gå i fellen å tenke at L nødvendigvis må være 0, noe som stemmer hvis f er kontinuerlig. Vi kan konstruere en odde funksjon som ikke er kontinuerlig i $x = 0$, for eksempel

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ -5, & \text{if } x < 0 \end{cases}.$$

$\boxed{3}$ Verifiser de oppgitte grenseverdiene ved å bruke

a) ϵ/δ-definisjonen for grenseverdier av funksjoner: $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$.

b) ε/A-definisjonen for grenseverdier av følger: $\lim_{x_n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x_n^2+1}} = 0$.

Løsning: Oppgave 3

a) To be proved: $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$.

Bevis. Let $\varepsilon > 0$ be given. If $x \neq -1$, we have

$$\left|\frac{x+1}{x^2-1} - \Big(-\frac{1}{2}\Big)\right| = \left|\frac{1}{x-1} - \Big(-\frac{1}{2}\Big)\right| = \frac{|x+1|}{2|x-1|}.$$

If $|x+1| < 1$, then $-2 < x < 0$, so $-3 < x-1 < -1$ and $|x-1| > 1$. Let $\delta = \min(1, 2\varepsilon)$. If $0 < |x-(-1)| < \delta$, then $|x-1| > 1$ and $|x+1| < 2\varepsilon$. Thus,

$$\left|\frac{x+1}{x^2-1} - \Big(-\frac{1}{2}\Big)\right| = \frac{|x+1|}{2|x-1|} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

This completes the required proof. □

b) To be proved: $\lim\limits_{x_n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x_n^2+1}} = 0.$

Bevis. By $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, we have for any $B > 0$, there exists $N > 0$, such that if $n > N$, we have

$$x_n > B.$$

Now, for any $\varepsilon > 0$, we take $B = \frac{1}{\varepsilon}$. Thus, for any $\varepsilon > 0$, there exists $B = \frac{1}{\varepsilon}$, such that if $x_n > B$, we have

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x_n^2+1}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{x_n^2+1}} < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{B} = \varepsilon.$$

This finishes the proof. □

$\boxed{4}$ Finn en kontinuerlig funksjon f med maksimalverdi $M = 3$ og minimalverdi $m = -2$ på intervallet $I = (-2, 2)$.

Tror du denne funksjonen har en nullverdi i intervallet I? Forklar med ord (Bevis er ikke nødvendig).

Løsning: Oppgave 4

Since I is an open interval, the maximum and minimum can not be attained on the boundary of I. They should be attained in the inner part of I. The answer is not unique. Here we only give an example.

Consider

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{if } -2 < x < -1 \\ -3x & \text{if } -1 \le x \le \frac{2}{3} \\ x - \frac{8}{3} & \text{if } \frac{2}{3} < x < 2. \end{cases}$$

Clearly, f is continuous on I and achieves its maximum at $x = -1$ and minimum at $x = \frac{2}{3}$.

For any function f satisfying the conditions, since maximum and minimum are attained in the inner part of I, we can without loss of generality find a, b such that $a < b$, $f(a) = -2$ and $f(b) = 3$. Now f is continuous on $[a, b]$.

Since f varies continuously between its minimum and maximum, it must take each value between m and M of which 0 is one. Formally, this follows from the intermediate value theorem.

$\boxed{5}$ Finn en funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er høyre-kontinuerlig i $x = 1$, kontinuerlig i $x = 0$ og ikke kontinuerlig i $x = 3$.

Løsning: Oppgave 5

The answer is not unique. Here we only give an example.

Consider

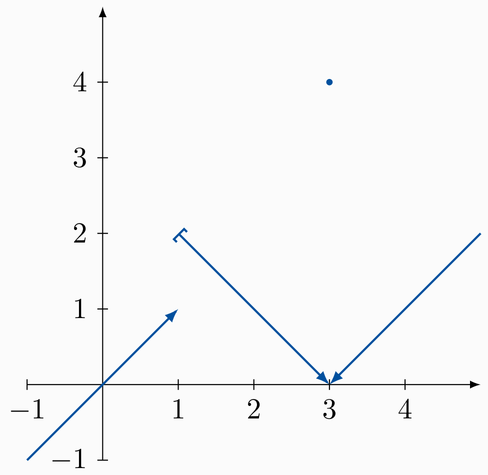
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < 1 \\ -x + 3 & \text{if } 1 \leq x < 3 \\ 4 & \text{if } x = 3 \\ x - 3 & \text{if } x > 3. \end{cases}$$

At $x = 0$, $f(x) = x$ is continuous.

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 1$, and $f(1) = 2$, so $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) \neq f(1)$, which means f is not left continuous at $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 2 = f(1)$, so f is right continuous at $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 3+} f(x)$, and $f(3) = 4$, so at $x = 3$, the left and right limit exist and are equal, but they are not equal to the function value at this point, which means f is not continuous at $x = 3$.



$\boxed{6}$ Vis ved hjelp av skvisteoremet at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x)\sin(\tan(x)), & \text{for } x \neq \pi/2 \\ 0, & \text{for } x = \pi/2 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = \frac{\pi}{2}$.

Hint: En mulig innfallsvinkel er å huske at

$$-|g(x)| \leq g(x) \leq |g(x)|.$$

Løsning: Oppgave 6

Vi observerer at $\lim_{x\to\pi/2}|\cos(x)| = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, samt at

$$-1 \leq \sin(\tan(x)) \leq 1 \quad \forall \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

og

$$-|\cos(x)| \leq \cos(x) \leq |\cos(x)|.$$

Sammen gir dette oss at

$$-|\cos(x)| \leq \cos(x)\sin(\tan(x)) \leq |\cos(x)| \quad \forall \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

og dermed må

$$\lim_{x\to\pi/2} \cos(x)\sin(\tan(x)) = 0$$

ved skvisteoremet.

$\boxed{7}$ La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en reell funksjon. Bevis at hvis f er kontinuerlig i a så er også $|f|$ kontinuerlig i a.

Hint: Omvendt triangelulikhet

Løsning: Oppgave 7

Bevis. Given any $\varepsilon > 0$, since f is continuous at a, we have for the above ε, there exists $\delta > 0$, such that for any $|x - a| < \delta$, we have

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Note that

$$\Big||f(x)| - |f(a)|\Big| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Thus, for any $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ as above, such that for any $|x - a| < \delta$, we have

$$\Big||f(x)| - |f(a)|\Big| < \varepsilon,$$

which means $|f|$ is continuous at a. This finishes the proof. □

$\boxed{8}$ Vi ser på en følge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ og lar $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en delfølge av denne. Vis at hvis $\{x_n\}$ har grenseverdi L, så har også $\{y_k\}$ grenseverdi L.

Hint: Husk at indeksene til underfølgen er voksende i den forstand at hvis $y_n = x_{k(n)}$ så er $k(1) < k(2) < \cdots$.

Løsning: Oppgave 8

For any $\varepsilon > 0$, we can find a $N > 0$ such that $j > N$ implies that $|x_j - L| < \varepsilon$ since $x_n \to L$. Now we claim that it also holds that $|y_j - L| < \varepsilon$. Indeed, $y_j = x_{k(j)}$ and $k(j) > N$ by the monotonicity of the indices of a subsequence as detailed in the hint. Consequently, $k(j) > N$ and $|y_j - L| = |x_{k(j)} - L| < \varepsilon$.