NTNU
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Øving 2

Høst 2023

Innleveringsfrist: Mandag 11. September
Lever øvingen i Øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys.

$\boxed{1}$ La $A = \{5, 7, 16\}$, $B = \{0, 5, 10, 16, 19\}$ og beregn

$$A \cup B, \qquad B \cap A, \qquad B \setminus A.$$

Løsning: Oppgave 1

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{5, 7, 16, 0, 10, 19\}, \\ B \cap A &= \{5, 16\}, \\ B \setminus A &= \{0, 10, 19\}. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Bevis at

$$\sum_{i=-100}^{100} i^3 = 0$$

Løsning: Oppgave 2

Vi skriver om summen til formen

$$\begin{aligned} \sum_{i=-100}^{100} i^3 &= \left(\sum_{i=-100}^{-1} i^3 \right) + 0^3 + \left(\sum_{i=1}^{100} i^3 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{100} -i^3 \right) + \left(\sum_{1}^{100} i^3 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{100} (i^3 - i^3) \\ &= \sum_{i=1}^{100} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Her har vi brukt at hvis $n < 0$ så er $n^3 = -|n|^3$

$\boxed{3}$ Vis at *trekantulikheten*

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

holder for alle reelle tall a og b.

Løsning: Oppgave 3

Vi begynner på venstresiden av ulikheten. Andrepotensen av alle reelle tall er alltid positiv, så spesielt må andrepotensen av absoluttverdien til ett tall være lik andrepotensen av tallet, eller skrevet symbolsk: $|x|^2 = x^2$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi kan dermed løse opp venstresiden av ulikheten på følgende vis:

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = |a|^2 + |b|^2 + 2ab$$

Vi skal nå benytte oss av to andre egenskaper til absoluttverdien. Den første er at ethvert tall er mindre eller lik sin egen absoluttverdi, eller skrevet symbolsk: $x \leq |x|$. Den andre er at absoluttverdien til et produkt er lik produktet av absoluttverdiene: $|ab| = |a| \cdot |b|$. Til sammen gir dette

$$ab \leq |ab| = |a| \cdot |b|.$$

Setter vi alt sammen får vi:

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2ab \\ &\leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \\ &= (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

Vi avslutter argumentet med å ta kvadratroten av begge sider, sammen med at $x \leq y \implies \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ for alle positive tall x, y.

$\boxed{4}$ Finn røttene til følgende polynom

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2.$$

Gi multiplisiteten til repeterende røtter.

Skriv til slutt polynomet som ett produkt av lineære faktorer.

Løsning: Oppgave 4

Vi ser med en gang at vi kan faktorisere ut x^2 og få

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 = x^2(x^2 + 8x + 16)$$

x^2 bidrar med en rot i $x = 0$ med multiplisitet to. Vi bruker så abc-formelen til å finne røttene av $x^2 + 8x + 16$:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 64 - 64}{2} = -4$$

Vi får dermed at $x = -4$ også er en rot med multiplisitet to.

Polynomet faktoriseres lineært som

$$x \cdot x \cdot (x+4) \cdot (x+4) = x^2(x+4)^2$$

$\boxed{5}$ Finn den naturlige definisjonsmengden og verdimengden til følgende funksjoner.

a) $f(x) = \sqrt{8 - 2x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x-2}}$

Ordbok (Norsk – Engelsk): Definisjonsmengde – Domain, Verdimengde – Range/Image.

Løsning: Oppgave 5

Det naturlige domenet/definisjonsmengden til en funksjon f er den største delmengden U_f av $\mathbb{R}$ som består av tall x slik at $f(x)$ er et reelt tall, skrevet med mengdenotasjon:

$$U_f \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Verdimengden/bildet (range) $V_f \subseteq \mathbb{R}$ (noen ganger også skrevet som range$(f) \subseteq \mathbb{R}$) til en funksjon f er alt som 'treffes' av f, altså alle tall $y \in \mathbb{R}$ hvor vi kan finne en $x \in D_f$ i definisjonsmengden slik at $f(x) = x$. Skrevet med mengdenotasjon:

$$V_f \coloneqq \{f(x) \mid x \in D_f\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ slik at} f(x) = y\}$$

a) $f(x) = \sqrt{8 - 2x}$;
Definisjonsmengde: Den begrensende delen av funksjonen f er rottegnet. Vi vet at over de reelle tallene så er kvadratrotfunksjonen kun definert på ikke-negative tall. Altså må $8 - 2x \geq 0$ for at $f(x)$ skal gi mening. Løser vi ulikheten så ser vi at $x \leq 4$. Vi får

$$D_f = (-\infty, 4]$$

Verdimengde/bilde: Husker vi tilbake til da vi lærte om kvadratrot så husker vi at den alltid spytter ut ett ikke-negativt tall, altså må bildet til f bestå av ikke-negative tall. Faktisk, hvis $y \geq 0$, så kan vi alltids løse likningen

$$\sqrt{8 - 4x} = y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8 - y^2}{4}$$

for x. Det betyr dermed at

$$V_f = [0, \infty)$$

b) $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x-2}}$;
Definisjonsmengde: Denne funksjonen har to begrensende deler, nemlig nevneren kan ikke være null og kvadratroten må som i forrige deloppgave ta inn positive tall. Den første begrensningen gir oss ulikheten

$$1 - \sqrt{x-2} \neq 0$$

og den andre begrensningen gir oss ulikheten

$$x - 2 \geq 0.$$

Løser vi ut den første ulikheten ser vi at $x \neq 3$, altså er $3 \notin D_f$. Løser vi ut den andre ulikheten får vi at $x \geq 2$. Legger vi det sammen får vi

$$D_f = [2, 3) \cup (3, \infty)$$

Verdimengde/bilde: Hvis vi løser likningen

$$y = \frac{1}{1 - \sqrt{x-2}}$$

med hensyn på x får vi

$$x = 2 + \left(1 - \frac{1}{y}\right)^2$$

Så hvis $y \neq 0$ får vi en reell løsning for x. La oss nå se på hva $f(x)$ kan bli når vi setter inn fra definisjonsmengden vi fant over. Først, hvis x er i det halvåpne intervallet $[2, 3)$ så må $0 = \sqrt{2-2} \leq \sqrt{x-2} < \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1$ siden kvadratrotfunksjonen er voksende. Altså får vi

$$0 < 1 - \sqrt{x-2} \leq 1$$

og dermed

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x-2}} \geq 1$$

jo nærmere 3 vi lar x være i $[2, 3)$, jo større vil $f(x)$ bli. Dermed er $[1, \infty)$ i verdimengden av f.
Lar vi heller x være i $(3, \infty)$, så ser vi at $1 - \sqrt{x-2} < 0$, og dermed

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x-2}} < 0$$

I $(3, \infty)$ kan vi også velge x til å være vilkårlig nærme 3, og jo nærmere 3 jo større absoluttverdi vil $f(x)$ ha, altså må $(-\infty, 0)$ også ligge i verdimengden. Totalt får vi

$$V_f = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$$

$\boxed{6}$ Gitt en funksjon f, anta at hvis x er i definisjonsmengden til f så er også $-x$ i definisjonsmengden. Vi sier at f er en **jevn funksjon** hvis

$$f(-x) = f(x) \quad \text{for enhver } x \text{ i definisjonsmengden til } f.$$

Vi sier at f er en **odde funksjon** hvis

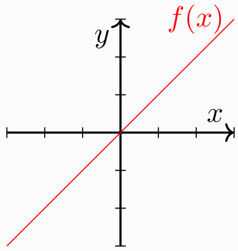
$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{for enhver } x \text{ i definisjonsmengden til } f.$$

Hvilken funksjon f, definert for hele den reelle linjen $\mathbb{R}$, er både jevn og odd?

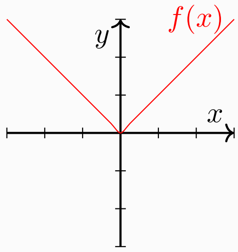
Ordbok (Norsk – Engelsk): Jevn – Even, Odde – Odd.

Løsning: Oppgave 6

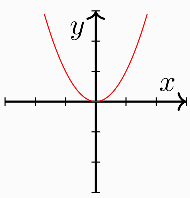
La oss bygge opp litt mer intuisjon for like/jevne (even) og odde (odd) funksjoner ved et knippe eksempler. Det enkleste eksempelet på en odde funksjon er nok $f(x) = x$. Vi ser at $f(-x) = -x = -f(x)$, og grafen til funksjonen ser ut som:



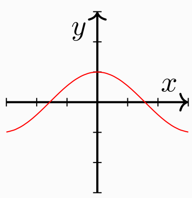
Hvis vi derimot sier at funksjonen vår tar en verdi x og gir oss absoluttverdien, altså $f(x) = |x|$, så får vi en jevn funksjon. Vi ser at $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, og grafen til funksjonen ser ut som



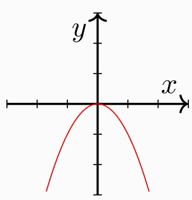
Flere eksempler på jevne funksjoner er:



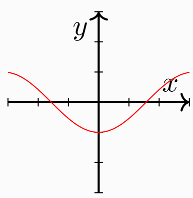
x^2



$\cos(x)$

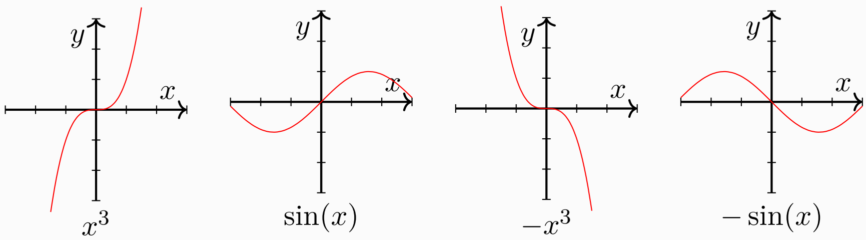


$-x^2$



$-\cos(x)$

Flere eksempler på odde funksjoner:



Nå til løsningen av oppgaven. Hvis en funksjon f skal være både jevn og odde på samme tid så må den oppfylle likhetene

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x) && \text{jevn} \\ f(-x) &= -f(x) && \text{odde} \end{aligned}$$

Hvis vi trekker den andre likheten fra den først får vi

$$\begin{aligned} f(-x) - f(-x) &= f(x) - (-f(x)) \\ 0 &= f(x) + f(x) \\ 0 &= 2f(x) \\ 0 &= f(x) \end{aligned}$$

Altså er $f(x) = 0$ for alle x.

$\boxed{7}$ La $f(x) = \frac{2}{x}$ og $g(x) = \frac{x}{1-x}$. Finn uttrykk for de følgende komposisjonsfunksjonene og spesifiser de naturlige definisjonsmengdene deres.

a) $f \circ g$

b) $g \circ f$

Løsning: Oppgave 7

a)

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{x}{1-x}\right) \\ &= \frac{2}{\frac{x}{1-x}} \\ &= \frac{2(1-x)}{x} \end{aligned}$$

Naturlig domene/definisjonsmengde er

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, 1\}.$$

Merk at i den endelige formelen for $(f \circ g)(x)$ så er den eneste tydelige begrensningen

$x \neq 0$, men siden vi teknisk sett først evaluerer $g(x)$ så må vi ta med begrensningen fra g også.

b)

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(\frac{2}{x}\right) \\ &= \frac{\frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \\ &= \frac{2}{x-2}\end{aligned}$$

Naturlig domene/definisjonsmengde er

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, 2\}.$$

$\boxed{8}$ Uttrykk $(\cos(3x))$ ved $(\sin(x))$ og $(\cos(x))$.

Hint: Begynn med $3x = 2x + x$, og bruk summeformelen for cosinus.

Løsning: Oppgave 8

Den trigonometriske identiteten fra hintet er:

$$\cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v)$$

I lys av at forfatter av løsningen allerede har løst oppgaven, så begynner vi med å utlede et par andre identiteter:

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x + x) \\ &= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= \underbrace{\cos^2(x) + \sin^2(x)}_{=1} - 2\sin^2(x) \\ &= 1 - 2\sin^2(x) \\ &= 2\cos^2(x) - 1\end{aligned}$$

Vi får også bruk for identiteten

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Til slutt løsningen:

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x)\\ &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)\\ &= (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)\\ &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1 - \cos^2(x))\cos(x)\\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Tangensfunksjonen er definert som

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

Hvor $x \in \mathbb{R}$ og $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Finn den maksimale definisjonsmengden til følgende funksjon og bevis identiteten

$$\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Hint: $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

Løsning: Oppgave 9

To assure the above quantity exists, we need

$$1 + \cos(x) \neq 0 \quad \text{and} \quad \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

which gives the natural domain

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + 2k\pi\}.$$

Then

$$\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right).$$