MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Øving 10

Høst 2023

Innleveringsfrist: Mandag 6. November
Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

$\boxed{1}$ Oline har løst følgende integrasjonsoppgave

$$\int_1^a f(x)\,dx\ , \quad \text{der } a \geq 1,$$

og fått svaret $a^3 - \ln(a) + 3a - 3$.

a) Forklar hvordan vi kan se at Olines svar ikke kan være riktig.

b) Bestem $f(x)$ dersom du får vite at det kun er konstantleddet (-3) som er feil.

Løsning: Oppgave 1

a) En generell egenskap ved bestemte integraler, $\int_a^b g(x)\,dx$, er at hvis vi lar $a = b$ så vil integralet bli 0. I integrasjonsoppgaven til Oline ser vi at svaret skal være gyldig for alle $a \geq 1$, og dermed spesielt for $a = 1$. Vi sjekker hva svaret hennes gir oss for $a = 1$:

$$a^3 - \ln(a) + 3a - 3 = 1^3 - 0 + 3 \cdot 1 - 3 = 1$$

Vi ser fra dette at svaret hennes ikke kan stemme siden det ikke er lik 0 for $a = 1$.

b) La oss repetere Integralkalkylens hovedsetning og hvordan vi finner bestemte integral:

Teorem 3.3.1 – Analysens fundamentalteorem (Integralkalkylens hovedsetning)

Hvis f er kontinuerlig på et intervall I, så er f integrerbar på ethvert lukket intervall innholdt i I. Hvis $c \in I$, så er funksjonen $A\colon I \to \mathbb{R}$ definert for hver $x \in I$ ved

$$A(x) = \int_c^x f(t)dt$$

kontinuerlig på I, og den oppfyller $A'(x) = f(x)$ på det indre av I.

Teorem 3.3.2 – Beregning av bestemte integraler

Hvis F og f er kontinerlige på $[a, b]$ og $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a, b)$, så er

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Vi har fått vite at det er kun (-3) som er feil i svaret til Oline. Altså må vi ha

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = x^3 - \ln(x) + 3x + C, \quad D_F = [1, \infty)$$

for en konstant C. Fra Integralkalkylens hovedsetning er $F(x)$ en antiderivert av $f(x)$ på $[1, \infty)$. Dermed får vi

$$f(x) = F'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + 3$$

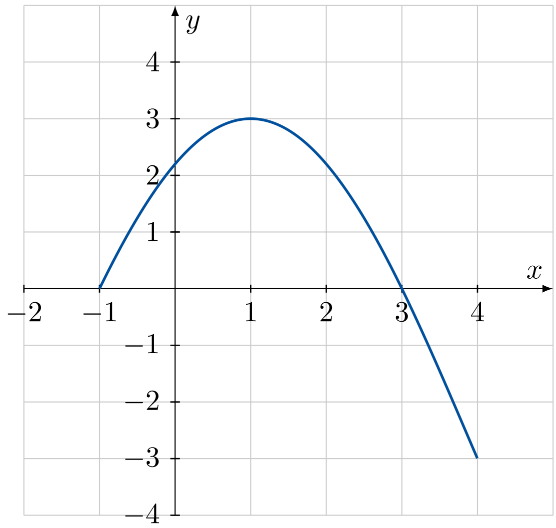
Konstantleddet falt vekk og vi har svaret vårt.

Vi kan forsåvidt spørre oss selv hva konstantleddet egentlig skulle være. Vi integrerer $f(x)$ og får:

$$\begin{aligned} \int_1^a 3x^2 - \frac{1}{x} + 3\,dx &= \Big[x^3 - \ln(x) + 3x\Big]_1^a \\ &= a^3 - \ln(a) + 3a - 1^3 + \ln(1) - 3 \cdot 1 \\ &= a^3 - \ln(a) + 3a - 4 \end{aligned}$$

Altså skulle C være lik -4 og ikke -3.

$\boxed{2}$ Nedenfor har vi tegnet grafen til en funksjon f for $x \in [-1, 4]$.



Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = f'(x), \quad D_g = [-1, 4]$$

a) Bruk grafen til å bestemme $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

b) Bestem a og b slik at

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

blir minst mulig.

Løsning: Oppgave 2

a) Fra **Teorem 3.3.2 – Beregning av bestemte integraler** vet vi at

$$\int_a^b g(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

for $a, b \in [1, 4]$, siden $f'(x) = g(x)$ der. Vi leser ut av grafen til f at $f(-1) = 0$ og $f(1) = 3$, dermed får vi

$$\int_1^{-1} g(x)\,dx = f(1) - f(-1) = 3 - 0 = 3$$

b) Hvordan kan vi gjøre

$$\int_a^b g(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

så liten som mulig? Jo, hvis vi lar b være et globalt minimalpunkt til f og a et globalt maksimalpunkt for f. Her observerer vi at det forekommer når $b = 4$ og $a = 1$.

$$\int_1^4 g(x)\,dx = f(4) - f(1) = -3 - 3 = -6$$

$\boxed{3}$ Evaluer integralene under.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x+2)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2}\right)\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{-4}^{4} (e^x - e^{-x})\,\mathrm{d}x$

Løsning: Oppgave 3

a)

$$\int_{-2}^{2} (x+2)\,\mathrm{d}x = 2 \times [2 - (-2)] = 8.$$

b)

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2}\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{x^4}{8}\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{9}{8}.$$

c)

$$\int_{-4}^{4} (e^x - e^{-x})\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{(odd function, symmetric interval).}$$

La oss koste på oss ett lite integrasjonstriks her: Hvis en kontinuerlig funksjon f er jevn på ett intervall symmetrisk om 0, e.g. $[-a, a]$, så vil

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

Og hvis en funksjon g er odde på samme intervall vil

$$\int_{-a}^{g} (x)\, dx = 0$$

Hvis det ikke gir mening umiddelbart, tegn opp og se på arealene. Trikset kommer til sin fulle rett hvis man ved variabeltriksing kan komme seg fra et tilfeldig intervall til et symmetrisk intervall.

4 Finn de følgende deriverte.

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{t}^{3} \frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}s$

b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(\sqrt{x})$, hvis $F(t) = \displaystyle\int_{0}^{t} \cos(s^2)\,\mathrm{d}s$

Løsning: Oppgave 4

a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t}^{3} \frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[-\int_{3}^{t} \frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}s\Big] = -\frac{\sin(t)}{t}.$$

b)

$$F(t) = \int_{0}^{t} \cos(s^2)\,\mathrm{d}s$$
$$F(\sqrt{x}) = \int_{0}^{\sqrt{x}} \cos(s^2)\,\mathrm{d}s$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(\sqrt{x}) = \cos(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}}.$$

5 Finn det følgende bestemte integralet av den kontinuerlige funksjonen

$$\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Løsning: Oppgave 5

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(x)]\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [\cos(x)]\,\mathrm{d}x$$
$$= \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

$\boxed{6}$ La Π_n være en partisjon av det oppgitte intervallet $[a, b]$ i n delintervaller av lik lengde $\Delta_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. Evaluer nedre darbouxsum $L(f, \Pi_n)$ og øvre darbouxsum $U(f, \Pi_n)$ for den oppgitte funksjonen f og den angitte n.

a) $f(x) = x$ på $[a, b] = [0, 2]$, med $n = 8$.

b) $f(x) = e^x$ på $[a, b] = [-2, 2]$, med $n = 4$.

Løsning: Oppgave 6

La $\Pi_n = a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ være partisjonen. Da kan vi repetere at **nedre darbouxsum** til f er gitt ved

$$L(f, \Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{c_i \in [x_{i-1}, x_i]} [f(c_i)]$$

og **øvre darbouxsum** til f er gitt ved

$$U(f, \Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{c_i \in [x_{i-1}, x_i]} [f(c_i)].$$

I vårt tilfelle har vi at delintervallene har lik lengde, altså $x_i - x_{i-1} = \Delta_i = \frac{b-a}{n}$ for alle i. Videre har vi at f er kontinuerlig i både a) og b), så spesielt vil den være begrenset på alle lukkede intervaller. Dermed har vi

$$\inf_{c_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(c_i) = \min_{c_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(c_i) \quad \text{og} \quad \sup_{c_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(c_i) = \max_{c_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(c_i).$$

En siste observasjon er at funksjonene i a) og b) er strengt voksende, så spesielt må

$$\min_{c_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(c_i) = f(x_{i-1}) \quad \text{og} \quad \max_{c_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(c_i) = f(x_i).$$

Vi forenkler dermed darbouxsummene her til

$$L(f, \Pi_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \right) \quad \text{og} \quad U(f, \Pi_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \right)$$

a) Vi finner først partisjonen Π_8 av $[0, 2]$. Fra $n = 8$, får vi $\Delta_i = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$, og Π_n:

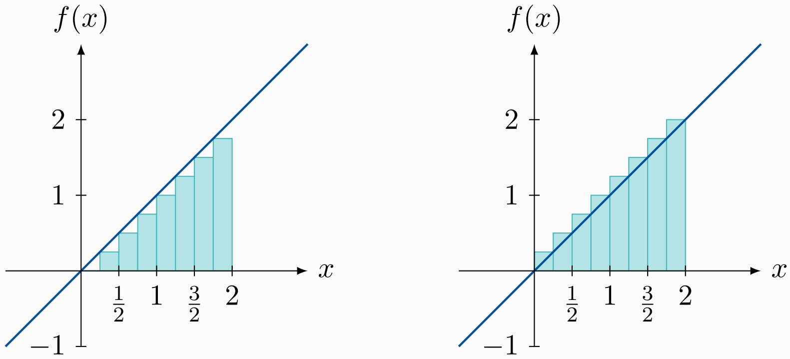
$$0 < \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2} < \tfrac{3}{4} < 1 < \tfrac{5}{4} < \tfrac{3}{2} < \tfrac{7}{4} < 2.$$

Nå får vi

$$\begin{aligned}
L(f,\Pi_n) &= \frac{1}{4}\cdot\left[f(0)+f(\tfrac{1}{4})+f(\tfrac{1}{2})+f(\tfrac{3}{4})+f(1)+f(\tfrac{5}{4})+f(\tfrac{3}{2})+f(\tfrac{7}{4})\right]\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left[0+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1+\frac{5}{4}+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}\right]\\
&= \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
U(f,\Pi_n) &= \frac{1}{4}\cdot\left[f(\tfrac{1}{4})+f(\tfrac{1}{2})+f(\tfrac{3}{4})+f(1)+f(\tfrac{5}{4})+f(\tfrac{3}{2})+f(\tfrac{7}{4})+f(2)\right]\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1+\frac{5}{4}+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+2\right]\\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$



$L(f,8)$ $U(f,8)$

b) Vi finner først partisjonen Π_4 av $[-2,2]$. $\Delta_i = \frac{2-(-2)}{4} = 1$, og Π_4:

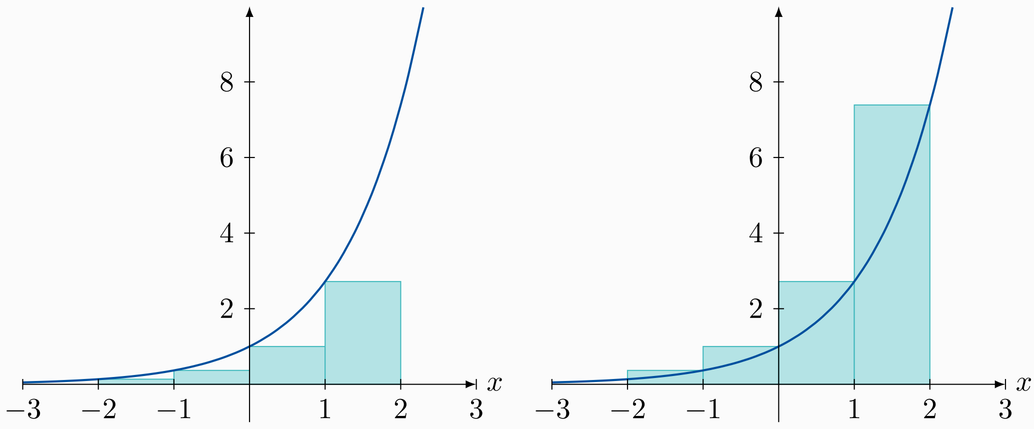
$$-2 < -1 < 0 < 1 < 2$$

Nå får vi

$$\begin{aligned}
L(f,4) &= 1\cdot[f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)]\\
&= e^{-2}+e^{-1}+e^{0}+e^{1}\\
&= \frac{e^4-1}{e^2(e-1)}\\
&\approx 4.22
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
U(f,4) &= 1\cdot[f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)]\\
&= e^{-2}+e^{-1}+e^{0}+e^{1}\\
&= \frac{e^4-1}{e(e-1)}\\
&\approx 11.48.
\end{aligned}$$



$L(f,4)$ $U(f,4)$

7 Uttrykk de oppgitte grensene som bestemte integral.

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1+\frac{2i}{n}\right)$

Løsning: Oppgave 7

Merk: Man kan komme frem til flere like riktige svar her.

Tanken her er at vi kan gjenkjenne summene som Riemann-summene til en funksjon over ett intervall $[a,b]$ hvor partisjonen er gitt ved inndeling i n like store delintervaller med lengde $\frac{b-a}{n}$. Hvis Π_n er partisjonen

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

og vi har gjort ett utplukk $U = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_{n-1}^*, x_n^*\}$ hvor $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, så er Riemannsummen til f basert på partisjonen Π_n og utplukket U gitt ved

$$R(f,\Pi,U) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_i^*)$$

Når $n \to \infty$ vil maskeviddene $(x_i - x_{i-1}) \to 0$, så vi kan like gjerne tenke at vi velger $x_i^* = x_i$. Videre har vi tenkt at delintervallene er like store, så vi får at $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ eller $x_i = x_{i-1} + \frac{b-a}{n} = a + i\frac{b-a}{n}$.

a) Her kan vi først se på summen uten grensetegn, og observere at vi summerer produktet $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$. Vi vil prøve å gjenkjenne en Riemann-sum hvor partisjonen har like store delintervaller; faktoren $\frac{1}{n}$ peker seg dermed ut som en maskevidde, da den ikke varierer med i. Det vil si at vi tenker $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$.

Den siste faktoren må dermed stå til $f(x_i)$, altså $f(x_i) = \sqrt{\frac{i}{n}}$. Nødvendigvis får vi da $x_i = \frac{i}{n}$. Videre $a = 0$, $b = n\frac{b-a}{n} = n\frac{1}{n} = 1$ og $f(x) = \sqrt{x}$. Vi summerer kunnskapen vår og får

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

b) Tilsvarende tankegang som i a) gir oss her

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right) = \int_0^2 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

Potensielt kunne man valgt $a = 1$ og $b = 3$ som gir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right) = \int_1^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

8 La

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{if } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Vis at f er integrerbar på $[0,2]$ og finn verdien til $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ ved å bregne de øvre og nedre Darbouxsummene.

Løsning: Oppgave 8

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{if } 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Let $0 < \varepsilon < 1$. Let $P = \{0, 1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1 + \frac{\varepsilon}{3}, 2\}$. Then

$$\begin{aligned} L(f,P) =& 1\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) + 0 + 0 = 1 - \frac{\varepsilon}{3}; \\ U(f,P) =& 1\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) + 1\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right) + 0 = 1 + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Since $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$, f is integrable on $[0,2]$. Since $L(f,P) < 1 < U(f,P)$ for every ε, therefore

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

9 Bruk middelverdisetningen for integraler til å beregne

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad p, n \text{ er naturlige tall.}$$

Løsning: Oppgave 9

Obs! Det lille boken snakker om middelverdisetningen for integraler (**Oppgave 3.17.10** er om et mer generelt resultat enn hva vi i dette emnet kaller middelverdisetningen for integraler. La oss repetere vår versjon raskt.

Teorem Middelverdisetningen for integraler

La f være kontinuerlig på $[a, b]$, da eksisterer det et punkt $c \in [a, b]$ slik at

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)f(x)$$

Assume $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. On $[n, n+p]$, $\sin(x)$ and $\frac{1}{x}$ are continuous. Since the product of two continuous function is still a continuous function, thus f is continuous on $[n, n+p]$. By the mean-value theorem for integrals, we have

$$\int_n^{n+p} \frac{\sin(x)}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{\sin(\xi)}{\xi} \cdot p, \quad \xi \in [n, n+p].$$

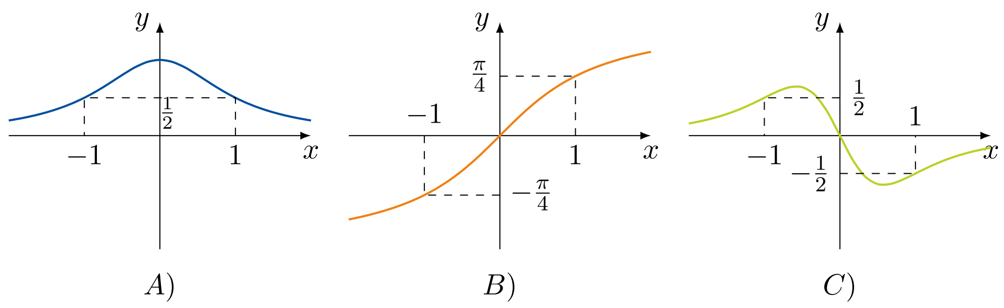
When $n \to \infty$, $\xi \to \infty$, and by $|\sin(\xi)| \leq 1$, we get

$$\int_n^{n+p} \frac{\sin(x)}{x}\, \mathrm{d}x = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} \cdot p = 0.$$

$\boxed{10}$ La f være en gitt funksjon. Figurene $A)$, $B)$ og $C)$ nedenfor viser grafene til

(i) $y = f(x)$ (ii) $y = f'(x)$ (iii) $y = \int_0^x f(t)dt$

i en eller annen rekkefølge.



Hvilken figur viser hvilken graf? Finn $\int_{-1}^{1} f(t)\, dt$.

Løsning: Oppgave 10

Kall de tre funksjonene i grafene for A, B og C. Om vi setter $F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$ skal vi identifisere F, F' og F'' blant A, B og C. Her finnes nær sagt utallige måter for å eliminere mulighetene slik at kun én gjenstår. For eksempel kan vi merke oss at

- $A' \neq B$ siden $A'(x) > 0$ når $x < 0$.
- $B' \neq C$ siden $B'(0) > 0$.
- $C' \neq A$ og $C' \neq B$ siden $C'(0) < 0$.

Eneste gjenstående mulighet er $A' = C$ og $B' = A$, slik at $B = F$, $A = B' = f$ og $C = A' = f'$.

Med andre ord $A = (i)$, $B = (iii)$ og $C = (ii)$.

Vi finner

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = F(1) - F(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$