Oppgave 1 Hvilke av følgende utsagn er korrekte? Svar med «Sann» eller «Usann». *Begrunnelse trengs ikke på denne oppgaven.*

a) Det eksisterer to forskjellige løsninger til differensialligningen $y' = y$.

b) Det eksisterer to forskjellige løsninger til initialverdi-problemet $y' = y + 1$, $y(0) = 2$.

c) For enhver kontinuerlig funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gjelder det at

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{2n}{N} + 1\right) = \int_0^2 f(t)\,dt.$$

d) Enhver kontinuerlig funksjon $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ er begrenset.

e) Enver begrenset funksjon $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ har et maksimum.

f) Hvis $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og $f'(x) > 0$ for $x \in (0,1)$, så er $f(0) < f(1)$.

g) $\dfrac{d}{dx} \arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ for $-1 < x < 1$.

h) Hvis A er en delmengde av $\mathbb{R}$ som har et minste verdi, så er $\inf A = \min A$.

i) Hvis A og B er delmengder av $\mathbb{R}$ og $C = \{x - y \,:\, x \in A,\ y \in B\}$, så er

$$\inf C = \inf A - \inf B.$$

j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \infty.$

Oppgave 2 Løs initialverdiproblemet

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

og finn det største intervallet I (som inneholder 0) hvor løsningen eksisterer.

Oppgave 3 La

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+1} + 2\arctan(x).$$

a) Finn definisjonsmengden til f.

b) Bestem intervallene der f øker og avtar.

c) Finn asymptotene til f. (Husk at $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$.)

d) Avgjør om f antar et maksimum eller minimum.

Oppgave 4

a) Beregn Taylorpolynomet av grad 4 rundt punktet $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2+t}\,dt.$$

b) Finn en tilnærming til $f(0,1)$ med feil mindre enn $0,001$.

Oppgave 5

a) Beregn $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx$.

b) Beregn $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$.

c) Vis at $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2-5}{x^4+3x+2}\,dx$ konvergerer. *Hint: Bruk sammenligningstesten.*

Oppgave 6

a) Finn et eksempel på en funksjon $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ slik at $\lim_{n\to\infty} f(1/n) = 0$, men grenseverdien $\lim_{x\to 0} f(x)$ ikke eksisterer.

b) Finn et eksempel på en kontinuerlig funksjon $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ slik at $f'(0)$ ikke eksisterer.

c) Finn et eksempel på en to ganger kontinuerlig deriverbar funksjon $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ slik at den tredje deriverte $f'''(0)$ ikke eksisterer.

Oppgave 7 Anta at $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er to ganger kontinuerlig deriverbar og at $|f''(x)| \leq 4$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Vis at

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0.$$

b) Vis at det eksisterer positive konstanter A, B, C slik at

$$|f(x)| \leq A + B|x| + C|x|^2$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.
Hint: Analysens fundamentalteorem.