Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i MA1101 Grunnkurs i analyse I

Eksamensdato: 02. desember 2022

Eksamenstid (fra-til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR- 270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Faglig kontakt under eksamen: Simon Halvdansson og Karl-Mikael Perfekt
Tlf.: 461 26 170 og 7359 3083

Faglig kontakt møter i eksamenslokalet: NEI

ANNEN INFORMASJON:

Skaff deg overblikk over oppgavesettet før du begynner på besvarelsen din.

Det er sju oppgaver i eksamenssettet, alle vektet likt. Les igjennom samtlige oppgaver før du begynner, den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, og motiver dine beregninger og beviser. Tegn gjerne.

Les oppgavene nøye, gjør dine egne antagelser og presiser i besvarelsen hvilke forutsetninger du har lagt til grunn i tolkning/avgrensing av oppgaven. Faglig kontaktperson skal kun kontaktes dersom det er direkte feil eller mangler i oppgavesettet. Henvend deg til en eksamensvakt hvis du ønsker å kontakte faglærer. Noter gjerne spørsmålet ditt på forhånd.

InsperaScan: Eksamen skal besvares på ark. Nederst i oppgaven finner du en sjusifret kode. Fyll inn denne koden øverst til venstre på *enhver* ark som du ønsker å levere. Det anbefales å gjøre dette underveis i eksamen. Dersom du behøver tilgang til kodene etter at eksamenstiden har utløpt, må du klikke «Vis besvarelse».

Varslinger: Hvis det oppstår behov for å gi beskjeder til kandidatene underveis i eksamen (f.eks. ved feil i oppgavesettet), vil dette bli gjort via varslinger i Inspera. Et varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen. Du kan finne igjen varselet ved å klikke på bjella øverst til høyre.

Trekk fra/avbrutt eksamen: Blir du syk under eksamen, eller av andre grunner ønsker å levere blankt/avbryte eksamen, gå til “hamburgermenyen” i øvre høyre hjørne og velg «Lever blankt». Dette kan ikke angres selv om prøven fremdeles er åpen.

Tilgang til besvarelse: Etter eksamen finner du besvarelsen din i arkivet i Inspera. Merk at det kan ta én virkedag før eventuelle håndtegninger vil være tilgjengelige i arkivet.

Oppgave 1 Hvilke av følgende utsagn er korrekte? Svar med «Sann» eller «Usann». *Begrunnelse trengs ikke på denne oppgaven.*

a) Funksjonen $x \mapsto |x|$ er deriverbar på hele $\mathbb{R}$.

b) Hvis $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, så er F deriverbar på hele $\mathbb{R}$.

c) $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\frac{n}{N}) = \int_0^1 f(t)\,dt$ for enhver kontinuerlig funksjon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

d) Enhver kontinuerlig funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er begrenset.

e) Enver begrenset funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.

f) Hvis $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og $f'(1/2) = 0$, så er $x = 1/2$ enten et minimumspunkt eller et maksimumspunkt til f.

g) $\dfrac{d}{dx} \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

h) Hvis A og B er delmengder av $\mathbb{R}$ og $C = \{x + y \,:\, x \in A,\ y \in B\}$, så er

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

i) Hvis $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 < 3\}$, så er $\sup A = 3$.

j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n = \infty.$

Oppgave 2 Løs initialverdiproblemet

$$y' = x + xy^2, \qquad y(0) = 1,$$

og finn det største intervallet I (som inneholder 0) hvor løsningen eksisterer.

Oppgave 3 La

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x - 1), \quad -3 \le x \le 3.$$

Bestem alle lokale maksimums- og minimumspunkter til f på intervallet $[-3,3]$. Bestem også funksjonens globale maksimum og minimum på $[-3,3]$.

Oppgave 4

a) Beregn Taylorpolynomet av grad 3 rundt punktet $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt.$$

b) Finn en tilnærming til $f(0,1)$ med feil mindre enn $0,001$.

Oppgave 5

a) Beregn $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

b) Beregn $\displaystyle\int xe^{-x}\, dx.$

c) Vis at $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ konvergerer. *Hint: Bruk sammenligningstesten.*

Oppgave 6

a) Finn to positive følger $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ og $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ slik at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \infty.$$

b) La $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ og $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ være to positive følger slik at $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ og $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$. Bestem en følge $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ (gitt ved følgene a_n og b_n) slik at både

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - c_n) = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = \infty$$

holder samtidig.

c) La $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ og $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ være to positive følger slik at $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ og $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \infty$. Bestem en følge $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ (gitt ved følgene a_n og b_n) slik at både

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = \infty$$

holder samtidig.

Oppgave 7 Anta at $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er to ganger kontinuerlig deriverbar i $x = x_0$, og la

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{if } x \neq x_0, \\ f'(x_0) & \text{if } x = x_0. \end{cases}$$

Vis at $g'(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}$.