Repetér selv grunnleggende relasjoner for cos, sin: $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ like

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ odde

$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ ...

Viktig!

$$\boxed{\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad \sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}}$$

Addisjonsformler

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Følger og grenser

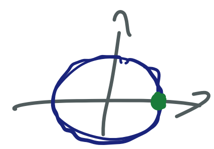
Def. En (reelle) følge er en ordnet, uendelig, sekvens av reelle tall,

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, som også skrives $(x_n)_{n\geq 1}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, eller bare $(x_n)_n$.

<u>Eks.</u> (i) $x_n = n$, $n\in\mathbb{N}$, $(x_n)_n = (1, 2, 3, \dots)$

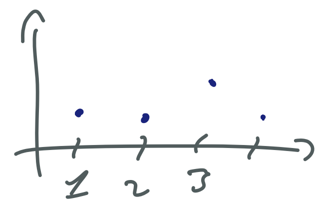
(ii) $(x_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$

(iii) $(\sin(2\pi n))_{n\geq 1} = (0, 0, 0, \dots)$



<u>Obs!</u> Følger er funksjoner

$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$



<u>Def.</u> La $M \subset \mathbb{N}$, uendelig. Da er følgen $(x_i)_{i\in M}$ en <u>delfølge</u> til $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Eks</u> $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right) = \left(\frac{1}{j}\right)_{j=2n}$ er en delfølge til $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Også $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 2}$ er en delfølge til $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Def. En følge er <u>begrenset</u> dersom tilsvarende mengde har <u>øvre</u> og <u>undre</u> begrensning: Finnes $A, B \in \mathbb{R}$;

$$A \leq x_n \leq B \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

(Da finnes det også C; $|x_n| \leq C$, $n \in \mathbb{N}$)

Følgen er <u>ubegrenset</u> ellers:

For hvert $C \geq 1$, finnes x_n; $|x_n| \geq C$.

Eks. (i) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ begrenset, ettersom

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) $(n^2)_{n \geq 1} = (1, 4, 9, 16, \dots)$ <u>ubegrenset</u>, ettersom for hvert tall $C \geq 1$, finnes $x_n = n^2 = C^2 \geq C$.

(iii) $(\cos(n))_{n \geq 1}$ begrenset, ettersom

$$|\cos(n)| \leq 1 \quad \forall n.$$

for hvert / for alle

Komplettsaksiomet for reelle tall

- Hver begrenset følge av reelle tall har et supremum (og et infimum).

Merk: (i) Gjelder også mengder i $\mathbb{R}$.

(ii) Gjelder ikke i $\mathbb{Q}$: $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$

er begrenset, men savner supremum (i $\mathbb{Q}$).

$$\boxed{\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$$ (uten bevis)

Def. En følge $(x_n)_n$ er:

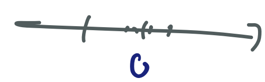
- (strengt) voksende dersom $x_{n+1} \geq x_n$ $(>)$ $\forall n \geq 1$,
- (strengt) avtakende dersom $(-x_n)_n$ er (strengt) voksende.
- (strengt) monoton dersom følgen er (strengt) voksende eller avtakende.

Eks. (i) $\left(\frac{1}{n}\right)_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$

er strengt avtakande, fordi:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \qquad \forall n \geq 1.$$

(ii) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_n = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$



er ikke monoton, fordi:

$x_1 < x_2$ men $x_3 < x_2$.

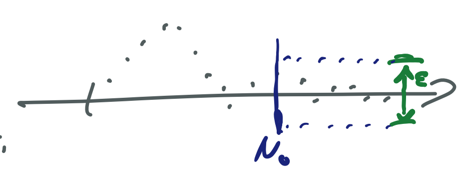
Def. Grenseverdier for følger

En følge $(x_n)_n$ sies ha grenseverdi (limes) x_0 dersom $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$;

for hver ... eksisterer

$|x_n - x_0| < \varepsilon$ dersom $n \geq N_0$.

Følgen er da konvergent.



Vi skriver $x_n \xrightarrow{\text{'går mot'}} x_0$ da $n \to \infty$.

eller $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$,

alt. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Eks. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ ettersom

$$|x_n - x_0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

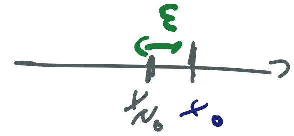
dersom $n \geq N_0$ med $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Teorem Hver monoton, begrenset følge av reelle tall har en grenseverdi.

Bevis Anta først at $(x_n)_n$ er voksende og begrenset.

Kompl.aksiomet $\Longrightarrow \exists \sup(x_n)_n$,
(minste øvre begr.)

Kall den x_0.



La $\varepsilon > 0$. Def. av sup $\Longrightarrow$

$$\boxed{\exists N_0;\ x_0 - x_{N_0} < \varepsilon \iff |x_0 - x_{N_0}| < \varepsilon.}$$

Hvis ikke, ville $x_0 - x_n \geq \varepsilon$ $\forall n$, dvs

$x_n \leq x_0 - \varepsilon < x_0$ $\forall n$.

Men da ville $x_0 - \varepsilon$ være en <u>mindre</u> øvre begrensning til $(x_n)_n$ enn $\sup (x_n)_n$.

umulig!

$(x_n)_n$ voksende $\Longrightarrow$

$$|x_0 - x_n| = x_0 - x_n \leq x_0 - x_{N_0} < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0.$$

Så $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

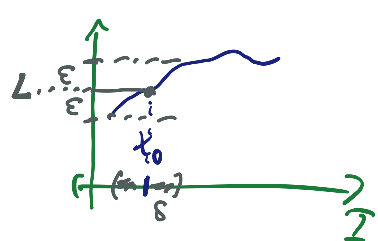
Dersom $(x_n)_n$ er avtakande, betrakt $(-x_n)_n$. #

Kontinuitet og grenseverdier for reelle funksj.

Hvordan gir vi mening til uttrykk som $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ og $\dfrac{\sin(x)}{x}$?

Def. La $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ (intervall) og

$f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.



Da har f <u>grenseverdi</u> L i x_0 dersom

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$;

$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$.

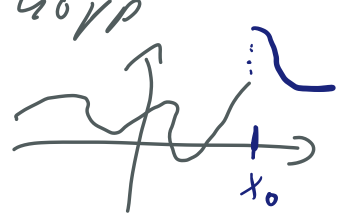
Vi skriver $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ eller $f(x) \to L$ da $x \to x_0$.

- Går også å uttrykke ved følger $x_n \to x_0$, se PDF-notater på Fremdriftsplan.

Dersom $f : I \to \mathbb{R}$ er definert i $x_0 \in I$, og $L = f(x_0)$, kaller f <u>kontinuerlig i x_0.</u>

f er <u>kontinuerlig på I</u>, dersom f er kont. i alle punkter $x_0 \in I$.

Intuitivt: kont. funksj. har 'ingen hopp'



- Polynomer er kont på $\mathbb{R}$.
- sin, cos, exp er kont på $\mathbb{R}$.
  $x \mapsto e^x$

Eks. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ har grenseverdi: $L = 2$ i $x_0 = 1$.

$f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{(\cancel{x-1})} = x+1 \text{ for } x \neq 1.$$

La $\varepsilon > 0$.

Da er $\left|f(x) - \overset{L}{2}\right| = |(x+1)-2| = |x-1| \overset{!}{<} \varepsilon$

dersom $|x-\underset{x_0}{1}| < \delta$ med $\delta \leq \varepsilon$.

Så $\dfrac{x^2-1}{x-1} \longrightarrow 2$ da $x \to 1$.

Så funksjonen $\tilde{f}$ gitt ved

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

er kont $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kontinuerlig utvidelse av f.

Teorem La $f, g : I \to \mathbb{R}$ være kont. i $x_0 \in I$.
Da er $f+g$, $f-g$, fg, f/g kont i x_0,
gitt at $g(x_0) \neq 0$ i tilfellet f/g.

Merk: Gjelder også grenseverdier, dvs

$f(x) \to L$ og $g(x) \to M$ da $x \to x_0$

$\Rightarrow f(x)g(x) \to LM$ da $x \to x_0$.

Obs! $L, M \in \mathbb{R}$ endelige

Bevis (for $f+g$, se notater for fg)

La $\varepsilon > 0$, $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$. f, g kont. i $x_0 \Longrightarrow \exists\, \delta_f, \delta_g$:

$$|x - x_0| < \delta_f \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \tilde{\varepsilon}.$$
$$|x - x_0| < \delta_g \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| < \tilde{\varepsilon}.$$

Velg $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. For $|x - x_0| < \delta$ gjelder:

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)|$$

$$\overset{\text{def. } f+g}{=} |f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))|$$

$$= |\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{a} + \underbrace{g(x) - g(x_0)}_{b}|$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$$\overset{\Delta\text{-ulik.}}{\leq} |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|$$

$$< \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

så $f+g$ kont. i x_0.

($f-g$ likt, betrakt $f+(-g)$ i stedet for g) ☒

Eks. Identitetsfunksjonen $id: x \mapsto x$

er kont:

$$|id(x) - id(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$$

dersom $|x - x_0| < \delta$, med valget $\delta \le \varepsilon$.

Konstante funksjoner $x \mapsto c$ er kontinuerlige fordi: $|f(x) - f(x_0)| = c - c = 0$, (så alltid $< \varepsilon$ uansett δ.)

Med teoremet $\Longrightarrow$ polynomer kont.

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j x^j = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_N x^N.$$

Dermed er også rasjonale funksjoner

$$x \mapsto \frac{\overset{\text{polynom}}{p(x)}}{q(x)}$$

kont på sin domene (dvs der $q(x) \neq 0$).