NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Mats Ehrnstrøm

Tlf: 73 59 17 44

Eksamensdato: 13. desember 2021

Eksamenstid (fra–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:
Det er sju oppgaver i eksamenssetet, alle vektet likt. Les igjennom samtlige oppgaver før du begynner, den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, og motiver dine beregninger/beviser. Tegn gjerne. Spør dersom noe er uklart.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 8

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave
Originalen er:
1-sidig ☐ **2-sidig** ☒
sort/hvit ☒ **farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 *(10p)*

Beregn

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(\ln(x^2))}{3x^2+x}$, $\qquad \sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{3x^2+x^3}$

(iii) $\lim_{x\to 1^+} \frac{|x^2-1|}{x^2-3x+2}$

Løsning. Ved bruk av grunnleggende regneregler og regler for limes (produkter av grenseverdier), får vi:

(a)

$$\begin{aligned}\frac{\sinh(\ln(x^2))}{3x^2+x} &= \frac{1}{2}\frac{e^{\ln(x^2)} - e^{-\ln(x^2)}}{3x^2+x} = \frac{1}{2}\frac{e^{\ln(x^2)} - e^{\ln(x^{-2})}}{3x^2+x} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{3x^2+x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{x^4}}{3+\frac{1}{x}} \overset{x\to\infty}{\to} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{3x^2+x^3} = \frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot\frac{1}{3+x} \overset{x\to 0}{\to} 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

(c)

$$\frac{|x^2-1|}{x^2-3x+2} \overset{x\geq 1}{=} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} \overset{x\neq 1}{=} \frac{x+1}{x-2} \overset{x\to 1^+}{\to} \frac{1+1}{1-2} = -2$$

Oppgave 2 *(10p)*

Beregn

(i) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{3+x}{4+x^2}\mathrm{d}x,$

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{3+x}{4-x^2}\mathrm{d}x,$

(iii) $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \frac{3+x}{4-x^2}\mathrm{d}x$

Løsning.

(a)

$$\int_{-2}^{2} \frac{3+x}{4+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \frac{3}{4+x^2}\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{-2}^{2} \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x}_{=0,\, f \text{ odde}} = \frac{3}{4}\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{1+(\frac{x}{2})^2}$$
$$= \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} = 3\arctan(1) = \frac{3\pi}{4}.$$

(b) Delbrøksoppspaltning gir

$$\frac{3+x}{4-x^2} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x} \overset{A=\frac{5}{4}, B=\frac{1}{4}}{\Longrightarrow} \frac{3+x}{4-x^2} = \frac{5}{4}\frac{1}{2-x} + \frac{1}{4}\frac{1}{2+x}.$$

Derav følger direkte

$$\int_{0}^{1} \frac{3+x}{4-x^2}\mathrm{d}x = \frac{5}{4}\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{2-x}\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{2+x}\mathrm{d}x = -\frac{5}{4}\ln(2-x)\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{4}\ln(2+x)\Big|_{0}^{1}$$
$$= \frac{1}{4}\left(5\ln(2) + \ln(3) - \ln(2)\right) = \ln(2) + \frac{1}{4}\ln(3).$$

(c) Da vi har et uegentlig integral, tar vi grenseverdien av et endelig integral (obs at integranden er kontinuerlig over dette intervallet).

$$\int_{10}^{R} \frac{3+x}{4-x^2}\mathrm{d}x = -\int_{10}^{R} \frac{3+x}{x^2-4}\mathrm{d}x = -\frac{5}{4}\ln(x-2)\Big|_{10}^{R} - \frac{1}{4}\ln(2+x)\Big|_{10}^{R}$$
$$= -\frac{1}{4}\left(5\underbrace{\ln(R-2)}_{\to\infty} - 5\ln(8) + \underbrace{\ln(2+R)}_{\to\infty} - \ln(12)\right) \to -\infty,$$

da $R \to \infty$.

Integralet er altså divergent.

Oppgave 3 *(10p)*

La

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4.$$

Ett nullpunkt er $x = 1$. Bestem eventuelle andre nullpunkter, kritiske punkter, singulære punkter, vendepunkter, samt lokale og globale topp- og bunnpunkter på intervallet $[-3, 3]$. Skissér så grafen til funksjonen på $\mathbb{R}$.

Løsning. Polynomdivisjon gir

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)(x+2)^2$$

med enkelt nullpunkt i $x = 1$ og dobbelt i $x = -2$. Som polynom er funksjonen overalt glatt (C^∞), og det finnes ingen singulære punkter. Kritiske punkter gis ved

$$f'(x) = (x+2)^2 + 2(x-1)(x+2) = 3x(x+2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ samt } x = -2.$$

Vendepunkter er punkter der $f''(x)$ skifter fortegn. Da

$$f''(x) = 3(x+2) + 3x = 6(x+1),$$

er eneste vendepunkt $x = -1$ (funksjonen er konkav til venstre om denne, og konveks til høyre). Mulige ekstrema på $[-3, 3]$ er kritiske og randpunkter:

$$f(-3) = -4, \quad f(-2) = 0, \quad f(0) = -4, \qquad f(3) = 50.$$

Alle disse er lokale ekstrema, se f', men kun $f(-3)$, $f(0)$ og $f(3)$ er globale ekstrema (på $[-3, 3]$).

Oppgave 4 *(10p)*

La $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ være en kontinuerlig deriverbar funksjon med

$$f(-1) = -1, \qquad f(1) = 1.$$

Vis at det finnes $x_0, x_1 \in (-1, 1)$ og $x_2 \in [-1, 1]$ slik at

$$f(x_0) = 0, \qquad f'(x_1) = 1 \quad \text{og} \quad f(x_2) = \sup_{x \in (-1,1)} f(x).$$

Angi eventuelle setninger du bruker.

Løsning. Da f er kontinuerlig og deriverbar på et kompakt intervall $[-1, 1]$, gjelder:

Skjæringssetingen. For hver y med $f(-1) = -1 < y < 1 = f(1)$ finnes $x_y \in (-1, 1)$, sånn at $f(x_y) = y$. Valget $y = 0$ gir x_0.

Middelverdisetningen. Det finnes $x_1 \in (-1, 1)$ sånn at

$$f(1) - f(-1) = f'(x_1)(1 - (-1)) \quad \Longleftrightarrow \quad 2 = 2f'(x_1) \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x_1) = 1.$$

Ekstremalverdisetningen. Det finnes $x_2 \in [-1, 1]$ sånn at $f(x_2) = \max_{x \in [-1,1]} f(x)$. Da f er kontinuerlig er $\max_{x \in [-1,1]} f(x) = \sup_{x \in (-1,1)} f(x)$.

Oppgave 5 *(10p)*

Finn den generelle løsningen til

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \cos(s)y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Hva er $y(t)$ da $y(0) = 1$, henholdsvis $y(0) = 0$?

Løsning. Analysens fundamentalsetning gir at

$$\begin{aligned}
y(t) = 1 + \int_0^t \cos(s)y(s)\,\mathrm{d}s &\iff \begin{cases} y'(t) &= \cos(t)y(t) \\ y(0) &= 1 \end{cases} \\
&\overset{y\neq 0}{\iff} \begin{cases} \frac{y'(t)}{y(t)} &= \cos(t) \\ y(0) &= 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \ln(|y(s)|)\Big|_0^t &= \sin(s)\Big|_0^t \\ y(0) &= 1 \end{cases} \\
&\overset{\ln(1)=0}{\iff} \begin{cases} |y(t)| &= |y(0)|e^{\sin(t)} \\ y(0) &= 1 \end{cases} \\
&\underset{e^{\sin(t)}>0}{\overset{y(0)=1}{\iff}} y(t) = e^{\sin(t)},
\end{aligned}$$

som er 2π-periodisk med verdimengde $[e^{-1}, e]$, da $\{\sin(t)\colon t \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$.

Nøyaktig samme regning gir at $y(t) = Ce^{\sin(t)}$ er den generelle løsningen på differensiallikningen, så enten er y overalt positiv/negativ eller overalt null. Alternativt kan man bruke integrerende faktor $e^{-\sin(t)}$ for å unngå eventuell deling med 0:

$$\begin{aligned}
y(t) = \int_0^t \cos(s)y(s)\,\mathrm{d}s \quad &\iff \quad \begin{cases} y'(t) &= \cos(t)y(t) \\ y(0) &= 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \left(y(t)e^{-\sin(t)}\right)' &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} y(t) &= y(0)e^{\sin(t)} \\ y(0) &= 0 \end{cases},
\end{aligned}$$

som gir $y(t) = 0$ i det andre tilfellet.

Oppgave 6 *(10p)*

Bruk implisitt derivasjon til å bestemme tangenten til kurven

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

i punktet $x_0 = \frac{a}{2}$, $y_0 = \frac{b}{\sqrt{3}}$.

Løsning. Det er en skrivefeil i denne oppgaven, slik at punktet ikke ligger på ellipsen. Å påpeke det er en riktig løsning.

Løsning ellers, gitt $y = y(x)$ deriverbar,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(x)}{b}\right)^2 = 1 \quad \overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} \quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2y(x)y'(x)}{b^2} = 0$$
$$\overset{y\neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad y'(x) = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{-x}{y(x)} = \Big|_{(x,y)=(\frac{a}{2},\frac{b}{\sqrt{3}})} \quad -\frac{\sqrt{3}b}{2a}.$$

Tangenten gjennom samme punkt gis av

$$\begin{aligned} Y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) &= \frac{b}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}b}{2a}\left(x - \frac{a}{2}\right) \\ &= \frac{b}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{3}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}b}{2a}x = \frac{7b}{4\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}b}{2a}x. \end{aligned}$$

Oppgave 7 *(10p)*

Vis at $f(x) = \sqrt{x}$ er kontinuerlig men ikke deriverbar i $x = 0$. Bruk definisjonen til kontinuitet og deriverbarhet i et punkt, med ε/δ-argument for kontinuitet. Finn de første tre leddene i Taylor-utviklingen av $f(x) = \sqrt{x}$ i punktet $x = 1$.

Løsning. La $\varepsilon > 0$. For $x > 0$,

$$|f(x) - f(0)| = |\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon,$$

dersom

$$|x - x_0| = x < \delta \leq \varepsilon^2.$$

Så valget $\delta = \varepsilon^2$ viser f er kontinuerlig i $x = 0$.

Funksjonen er ikke deriverbar, per definisjon, da

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \overset{x \to 0^+}{\to} \infty.$$

Taylorpolynomet av orden to, med tre ledd, i punktet $x_0 = 1$ gis ved

$$f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(1) = 1 + (x-1)\frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8},$$

da $(x^{\frac{1}{2}})'' = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$.