

Institutt for matematiske fag

## Eksamensoppgave i MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse 1

**Faglig kontakt under eksamen:** Mats Ehrnstrøm og William Hornslien

**Tlf.:** 73 59 17 44, 94 84 11 96

**Eksamensdato:** 13. desember 2021

**Eksamenstid (fra-til):** 09.00–13.00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** D. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

**Annen informasjon:** Det er sju oppgaver i eksamenssettet, alle vektet likt. Les igjennom samtlige oppgaver før du begynner, den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, og motiver dine beregninger og beviser. Tegn gjerne. Spør dersom noe er uklart.

**Målform/språk:** bokmål

**Antall sider (uten forside):** 2

**Antall sider vedlegg:** 0

<b>Informasjon om trykking av eksamensoppgave</b>	
<b>Originalen er:</b>	
<b>1-sidig</b> <input type="checkbox"/>	<b>2-sidig</b> <input type="checkbox"/>
<b>sort/hvit</b> <input type="checkbox"/>	<b>farger</b> <input type="checkbox"/>
<b>skal ha flervalgskjema</b> <input type="checkbox"/>	

**Kontrollert av:**

---

Dato

Sign



**Oppgave 1**

(10p)

Beregn

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(\ln(x^2))}{3x^2 + x}, \quad \sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{3x^2 + x^3}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 3x + 2}$$

**Oppgave 2**

(10p)

Beregn

$$(i) \int_{-2}^2 \frac{3+x}{4+x^2} dx,$$

$$(ii) \int_0^1 \frac{3+x}{4-x^2} dx,$$

$$(iii) \int_{10}^{\infty} \frac{3+x}{4-x^2} dx$$

**Oppgave 3**

(10p)

La

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4.$$

Ett nullpunkt er  $x = 1$ . Bestem eventuelle andre nullpunkter, kritiske punkter, singulære punkter, vendepunkter (inflection points), samt lokale og globale topp- og bunnpunkter på intervallet  $[-3, 3]$ . Skissér så grafen til funksjonen på  $\mathbb{R}$ .

**Oppgave 4**

(10p)

La  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  være en kontinuerlig deriverbar funksjon med

$$f(-1) = -1, \quad f(1) = 1.$$

Vis at det finnes  $x_0, x_1 \in (-1, 1)$  og  $x_2 \in [-1, 1]$  slik at

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_1) = 1 \quad \text{og} \quad f(x_2) = \sup_{x \in (-1, 1)} f(x).$$

Angi eventuelle setninger du bruker.

**Oppgave 5**

(10p)

Finn den generelle løsningen til

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \cos(s)y(s) \, ds.$$

Hva er  $y(t)$  når  $y(0) = 1$ , og når  $y(0) = 0$ ?

**Oppgave 6**

(10p)

Bruk implisitt derivasjon til å bestemme tangenten til kurven

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

i punktet  $x_0 = \frac{a}{2}$ ,  $y_0 = \frac{b}{\sqrt{3}}$ .

**Oppgave 7**

(10p)

Vis at  $f(x) = \sqrt{x}$  er kontinuerlig men ikke deriverbar i  $x = 0$ . Bruk definisjonen til kontinuitet og deriverbarhet i et punkt, med  $\varepsilon/\delta$ -argument for kontinuitet. Finn de første tre leddene i Taylor-utviklingen av  $f(x) = \sqrt{x}$  i punktet  $x = 1$ .