Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs Analyse I
Høst 2018

Løsningsforslag — Øving 2

1

a) $(x_n)_n$ er begrenset nedenfra siden $1 \leq x_n$ for alle n. Det er ingen begrensning ovenfra: Gitt $M \in \mathbb{R}$ finnes $N \in \mathbb{N}$ slik at $N \geq M$. Da er $x_k > M$ for alle $k > N$. Siden $x_{n+1} \geq x_n$ for alle n er følgen voksende. Den kan ikke være avtakende fordi $x_{n+1} \not\leq x_n$ for alle n.

b) $(1, 1, 1, ...)$ er begrenset både ovenfra og nedenfra av 1. Siden følgen er konstant er det både sant at $x_{n+1} \geq x_n$ og $x_{n+1} \leq x_n$ for alle n. Dermed er følgen både voksende og avtakende.

c) Følgen er begrenset ovenfra av 1, siden $x_{2n+1} = 1$ for alle n, og $x_{2n} < 0 < 1$ for alle n. Den er ikke begrenset nedenfra. For alle $M \in \mathbb{R}$ finnes $N \in \mathbb{Z}$ med $N \leq M$. Da er $x_{2N-2} < N < M$. Følgen er ikke voksende eller avtakende, siden generelt har vi ikke at $x_{n+1} \geq x_n$ eller $x_{n+1} \leq x_n$.

d) Siden $x_n \geq 0$ er følgen begrenset nedenfra. Vi påstår nå at $x_{n+1} \geq x_n$, og viser dette ved induksjon. Merk at $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$, så påstanden er sann for grunntilfellet $n = 1$. Vi antar så at $x_{n+1} > x_n$ for alle $n = 1, 2, \ldots m - 1$. Det gjenstår å vise at dette medfører at $x_{m+1} > x_m$. Merk at $x_m^2 = \sqrt{2 + x_{m-1}}^2 = 2 + x_{m-1}$. Dermed er

$$x_{m+1}^2 - x_m^2 = (2 + x_m) - (2 + x_{m-1}) = x_m - x_{m-1} > 0,$$

hvor siste ulikhet følger av induksjonshypotesen. Siden $x_n \geq 0$ for alle n vil $x_{m+1}^2 - x_m^2 > 0$ medføre at $x_{m+1} - x_m > 0$, altså at $x_{m+1} > x_m$. Derfor er følgen voksende, og det følger umiddelbart også at den ikke er avtakende. Vi har fått oppgitt at $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. Siden følgen er voksende og har grenseverdi 2, kan vi ikke ha noen $k \in \mathbb{N}$ slik at $x_k > 2$. Det følger da at følgen er begrenset ovenfra av 2.

2 Vi ser at følgen $(|x_n|)_n = (\frac{1}{n})_n$ er avtakende. Vi påstår at $\inf_n x_n = -1$. Har at $x_1 = -1$, og siden $(|x_n|)_n$ er avtakende, er $x_n \geq -1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed er $L = -1$ en nedre skranke. Det er også største nedre skranke: La $\varepsilon > 0$. Da er $-1 + \varepsilon > -1 = x_1$, så $-1 + \varepsilon$ kan ikke være en nedre skranke for noen $\varepsilon > 0$. Det følger at $\inf_n x_n = -1$.

Videre påstår vi at $\sup_n x_n = \frac{1}{2}$. Ser at $x_2 = \frac{1}{2}$ og $x_1 = -1 < \frac{1}{2}$. Siden $(|x_n|)_n$ er avtakende er $x_n \leq \frac{1}{2}$ for alle n. Dermed er $\frac{1}{2}$ en øvre skranke. Det er også minste øvre skranke: La $\varepsilon > 0$. Da er $\frac{1}{2} - \varepsilon$ ikke en øvre skranke, siden $x_2 = \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \varepsilon$. Det følger av $\sup_n x_n = \frac{1}{2}$.

Til slutt hevder vi at $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. La $\varepsilon > 0$. Vi må finne $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $k \geq N$ er $|x_k - 0| < \varepsilon$, altså $|x_k| < \varepsilon$. Finn N slik at $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Da er $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ for $k \geq N$. For slik k har vi da

$$|x_k| = |\frac{(-1)^k}{k}| = |\frac{1}{k}| < \varepsilon,$$

så det følger at $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

1.2:14,22,30

a) Ved tredje kvadratsetning/konjugatsetningen får vi

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x}{x-2} = \frac{-2}{-2-2} = \frac{1}{2}$$

b) Vi ser på de ensidige grensene. For $x < 2$ er $|x-2| = -(x-2)$, så vi får

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1,$$

mens for $x > 2$ er $|x-2| = x-2$, så vi får

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1.$$

De ensidige grensene er ikke like, så grenseverdien eksisterer ikke.

c) Vi faktoriserer før $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ (bruk gjerne polynomdivisjon for å gjøre dette). Da får vi

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x^2-x+1) = (-1)^2-(-1)+1 = 3.$$

1.5:12,19,18

a) La $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det finnes $\delta > 0$ slik at for $|x-2| < \delta$ er $|(5-2x)-1| < \varepsilon$. Først skriver vi om

$$|(5-2x)-1| = |4-2x| = 2|2-x| = 2|x-2|.$$

La nå $\delta < \varepsilon/2$. For $|x-2| < \delta$ har vi da

$$|(5-2x)-1| = 2|x-2| < 2\frac{\epsilon}{2} = \varepsilon.$$

Det følger at $\lim_{x\to 2}(5-2x) = 1$.

b) La $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det finnes $\delta > 0$ slik at for $|x-1| < \delta$ er $|\sqrt{x}-1| < \varepsilon$. La $\delta < \epsilon$ og $\delta < 1$. Merk at under disse antakelsene er $|\sqrt{x}+1| > 1$ (vi må garantere en nedre skranke, ikke en øvre skranke, siden vi skal dividere med $|\sqrt{x}+1|$ i utregningen under). Ved tredje kvadratsetning/konjugatsetningen har vi da for $|x-1| < \delta$ at

$$|\sqrt{x}-1| = \frac{|\sqrt{x}-1|\cdot|\sqrt{x}+1|}{|\sqrt{x}+1|} = \frac{|x-1|}{|\sqrt{x}+1|} < \frac{\delta}{|\sqrt{x}+1|} < \frac{\delta}{1} < \varepsilon.$$

Det følger at $\lim_{x\to 1}\sqrt{x} = 1$.

c) La $\varepsilon > 0$, og anta uten tap av generalitet at $\varepsilon < 1$. Anta videre at $(x_n)_n$ er en følge slik at $x_n \to -1$. Per antakelse finnes da $N \in \mathbb{N}$ slik at $|x_n - (-1)| = |x_n+1| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. For $n \geq N$ er da

$$\begin{aligned}
|\frac{x_n+1}{x_n^2-1} - (-\frac{1}{2})| &= |\frac{x_n+1}{(x_n+1)(x_n-1)} + \frac{1}{2}| \\
&= |\frac{1}{x_n-1} + \frac{1}{2}| \\
&= |\frac{2}{2(x_n-1)} + \frac{x_n-1}{2(x_n-1)}| \\
&= \frac{1}{2}|\frac{x_n+1}{x_n-1}| \\
&< \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|x_n-1|}.
\end{aligned}$$

Siden $|x_n + 1| < \varepsilon < 1$ er $x_n < 0$, så $|x_n - 1| > 1$. Dermed kan vi skrive

$$|\frac{x_n+1}{x_n^2-1} - (-\frac{1}{2})| < \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{|x_n-1|} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{1} < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon < \varepsilon.$$

Siden følgen $(x_n)_n$ var en vilkårlig følge som konvergerer mot -1, har vi at $\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$.

5 a) f er kontinuerlig på $(-\infty, 0)$ og på $(0, \infty)$, så vi trenger bare sjekke om f er kontinuerlig i 0. For at dette skal være tilfelle, trenger vi $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 0 = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x^2 = 0$$

De ensidige grenseverdiene er like i $x = 0$, og er lik funksjonsverdien i $x = 0$, så vi har kontinuitet i 0. Det følger at f definerer en kontinuerlig funksjon.

b) f definerer ikke engang en funksjon.

1.2:78 Både $g(x) = x$ og $h(x) = \sin x$ har definisjonsmengde lik $\mathbb{R}$, mens $k(x) = \frac{1}{x}$ har definisjonsmengde $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Komposisjonen av disse funksjonene som utgjør $f : x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ har derfor definisjonsmengden $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vi skal vise at $\lim_{x\to0} x\sin(\frac{1}{x})$ eksisterer. Vi påstår grenseverdien er lik 0. La $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det finnes $\delta > 0$ slik at for $|x-0| = |x| < \delta$ er $|x\sin(\frac{1}{x})-0| = |x\sin(\frac{1}{x})| < \varepsilon$. Merk at $|\sin(y)| \leq 1$ for alle y. Derfor er $|x\sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$. La nå $\delta < \varepsilon$. For $|x| < \delta$ har vi da

$$|x\sin(\frac{1}{x})| \leq |x| < \delta < \varepsilon.$$

Det følger at $\lim_{x\to0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$.

Vi kan nå definere funksjonen $\tilde{f}$ gitt ved

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Denne funksjonen er kontinuerlig. Kontinuitet for $x \neq 0$ følger av kontinuitet av g, h og k ovenfor for $x \neq 0$. Kontinuitet i $x = 0$ er det samme som at grenseverdien eksisterer og er lik hva vi har definert funksjonsverdien i $x = 0$ til å være. Disse stemmer overens, så $\tilde{f}$ er en kontinuerlig funksjon.

1.5:31 Vi beviser utsagnet ved motsigelse. La $(x_n)_n$ være en følge, og anta at $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ og $\lim_{n\to\infty} x_n = M$, med $L \neq M$. La $\varepsilon = \frac{|L-M|}{3} > 0$. Siden $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ finnes det $N_1 \in \mathbb{N}$ slik at for alle $k \geq N_1$ er $|x_k - L| < \frac{|L-M|}{3}$. Tilsvarende, siden $\lim_{n\to\infty} x_n = M$, finnes det $N_2 \in \mathbb{N}$ slik at for alle $k \geq N_2$ er $|x_k - M| < \frac{|L-M|}{3}$. La $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ved trekantulikheten har vi da for $k \geq N$

$$\begin{aligned}|L-M| &= |L - x_k + x_k - M| \leq |L - x_k| + |x_k - M| = |x_k - L| + |x_k - M| \\ &< \frac{|L-M|}{3} + \frac{|L-M|}{3} = \frac{2|L-M|}{3} < |L-M|,\end{aligned}$$

som er en motsigelse. Det følger at $L = M$.