Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 1

P.1:7,12

a) Vi uttrykker mengden av alle reelle tall x som oppfyller $x \geq 0$ og $x \leq 5$ som
$$[0, \infty) \cap (-\infty, 5] = [0, 5].$$

b) Vi uttrykker mengden av alle reelle tall x som oppfyller $x < 4$ eller $x \geq 2$ som
$$(-\infty, 4) \cup [2, \infty) = (-\infty, \infty).$$

P.1:44

Vi vet at $|x-1| = 1-x$ hvis og bare hvis $x-1 = 1-x$ eller $-(x-1) = 1-x$. Siden venstresiden alltid er ikke-negativ må høyresiden også være det. Alle løsningene må derfor være i mengden $(-\infty, 1]$. La oss se på begge disse to likhetene.

$$\begin{aligned} &x - 1 = 1 - x \\ &\Leftrightarrow 2x = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 1, \end{aligned}$$

så $x = 1$ er en løsning. Vi har også at

$$\begin{aligned} &-(x-1) = 1 - x \\ &\Leftrightarrow -x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow 0 = 0, \end{aligned}$$

som alltid er tilfredsstilt. I lys av at løsningene måtte være i $(-\infty, 1]$ konkluderer vi med at løsningsmengden er hele $(-\infty, 1]$.

P.1:45

Vi bruker triangelulikheten på $a = a - b + b$ og får

$$\begin{aligned} |a| = |a - b + b| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b| \\ \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \end{aligned}$$

Vi ønsker nå å ta absoluttverdi på begge sider, men vi må være sikre på at ingenting skjer med ulikhetstegnet når vi gjør det. Merk at vi har vist at $|a| - |b| \leq |a - b|$ uavhengig av om $|a| - |b|$ er positiv eller negativ. På grunn av dette, samt observasjonen at $|a-b|$ alltid er ikke-negativ, kan vi ta absoluttverdi uten å bekymre oss for at ulikhetstegnet kan snu. Da får vi

$$||a| - |b|| \leq ||a - b|| = |a - b|,$$

som var det vi skulle vise.

P.3:4,7 a) Ved standardlikningen for en sirkel fra side 18 vil en sirkel med senter (h, k) og radius $a \geq 0$ beskrives ved likningen

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2.$$

En sirkel med radius 5 og sentrum i $(3, -4)$ kan da beskrives av

$$(x-3)^2 + (y-(-4))^2 = 5^2,$$

som også kan skrives

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 5^2.$$

b) Vi ønsker nok en gang å bruke standardlikningen for en sirkel. Det egner seg derfor å legge til noe "lurt" på begge sider slik at vi kan skrive om til denne formen. Merk at $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ ved andre kvadratlikning. På tilsvarende vis er $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$ ved første kvadratlikning. Da kan vi skrive

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y &= 4 \\ x^2 - 2x + y^2 + 4y &= 4 \\ (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 &= 4 \\ \implies (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 9 = 3^2. \end{aligned}$$

Ved standardlikningen for en sirkel beskriver likningen en sirkel med sentrum i $(1, -2)$ og radius 3.

P.4:1.2.5 a) $f : x \mapsto 1 + x^2$ er komposisjonen $f = g \circ h$ hvor $g(y) = y + 1$ og $h(y) = y^2$. Begge disse har domener/definisjonsmengder lik $\mathbb{R}$. Dermed er $D_f = \mathbb{R}$. Likningen $1 + x^2 = a$ er løsbar hvis og bare hvis $a \geq 1$, så $R_f = [1, \infty)$.

b) f er komposisjonen $f = g \circ h$, hvor $h(y) = -\sqrt{y}$ og $g(y) = y + 1$. Vi har at $D_h = [0, \infty)$ og $D_g = \mathbb{R}$, så $D_f = [0, \infty)$. Vi må ha $R_f \subset (-\infty, 1]$ siden vi trekker noe ikke-negativt fra 1. Likningen $1 - \sqrt{x} = a$ er løsbar hvis og bare hvis $a \leq 1$, så $R_f = (-\infty, 1]$.

c) h er definert overalt hvor telleren er definert. Med andre ord er $t \in D_f$ hvis og bare hvis $2-t \geq 0$ og $\sqrt{2-t} \neq 0$. Med andre ord må $2-t > 0$, så $D_f = (-\infty, 2)$. Vi finner så verdimengden. Merk først at $h(0) = 0$, så $0 \in R_f$. Anta derfor at $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{t}{\sqrt{2-t}} = a \iff \frac{t}{a} = \sqrt{2-t}$$

Fra dette ser vi at t og a har samme fortegn, siden $\sqrt{2-t} > 0$. Videre

$$\sqrt{2-t} = \frac{t}{a} \iff t^2 = a^2|2-t| = a^2(2-t) = 2a^2 - a^2 t$$

siden $t < 2$. Dermed kan vi gjøre følgende utregning

$$\begin{aligned} & t^2 = 2a^2 - a^2 t \\ \iff & 0 = t^2 + a^2 t - 2a^2 \\ \iff & t = \frac{-a^2 \pm \sqrt{(a^2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a^2)}}{2 \cdot 1} = -\frac{a^2}{2} \pm \frac{\sqrt{a^4 + 8a^2}}{2}, \end{aligned}$$

som viser at $a \in R_f$. Dermed er $R_f = \mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ Ifølge definisjonen av en funksjon f skal det for hver x i domenet/definisjonsmengden D_f være en unik $f(x)$ i verdimengden. (Så lenge $D_f \neq \{0\}$) vil det for $x \in D_f \setminus \{0\}$ være to verdier $f(x)$ for hver x. Dermed beskriver relasjonen ikke en funksjon.

$\boxed{\text{P.5:8}}$ a) $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\frac{2}{x}) = \frac{2}{\frac{2}{x}} = x$. Videre er $D_{f\circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_f\}$. Siden $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ser vi at $f(x) \in D_f$ for alle $x \in D_f$. Det følger at $D_{f\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b)

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\frac{x}{1-x}) = \frac{2}{\frac{x}{1-x}} = \frac{2(1-x)}{x}$$

Merk at $0 \notin D_f$ og at $t = 0$ er det unike elementet slik at $g(t) = 0$. Merk også at $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Dermed er $D_{f\circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

c)

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\frac{2}{x}) = \frac{\frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{2}{x-2} \tag{1}$$

Merk at $D_g = \mathbb{R}\{1\}$ og at $t = 2$ er det unike elementet slik at $f(t) = 1$. Videre er $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dermed er $D_{g\circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

d)

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(\frac{x}{1-x}) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-x-x} = \frac{x}{1-2x}$$

Merk at $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ og at $t = 1/2$ er det unike elementet slik at $g(t) = 1$. Dermed er $D_{g\circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_g\} = \mathbb{R}\{1/2, 1\}$.

$\boxed{\text{P.6:34}}$ At f er odde gir $-f(x) = f(-x)$ for alle $x \in D_f$, mens at f er jevn gir at $f(x) = f(-x)$ for alle $x \in D_f$. Vi kombinerer disse og får at $f(x) = -f(x)$ for alle $x \in D_f$. Det følger at $2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ for alle $x \in D_f$. Dermed er $f = 0$.

$\boxed{\text{P.7:15}}$ Vi vet at $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$ og $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$. Sett $t = \frac{x}{2}$. Da har vi at

$$\begin{aligned}\tan^2(\frac{x}{2}) &= \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} = \frac{\frac{1-\cos(2t)}{2}}{\frac{1+\cos(2t)}{2}} = \frac{1-\cos(2t)}{1+\cos(2t)} \\ &= \frac{1-\cos(2\frac{x}{2})}{1+\cos(2\frac{x}{2})} = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)},\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

$\boxed{\text{P.7:18}}$ Først bruker vi addisjonsformelen for å få

$$\sin(2x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

og

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x). \tag{2}$$

Ved å bruke addisjonsformelen nok en gang får vi

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) \\
&= 2\sin(x)\cos(x) \cdot \cos(x) + (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \cdot \sin(x) \\
&= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) \\
&= 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x).
\end{aligned}$$

Oppgave P.7:18 i boken ber oss om å uttrykke $\cos 3x$ ved $\sin x$ og $\cos x$. Utregningen blir da

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\
&= (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \cdot \cos(x) - 2\sin(x)\cos(x) \cdot \sin(x) \\
&= \cos^3(x) - \sin^2(x)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\
&= \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x)
\end{aligned}$$