Løsningsforslag — Øving 12

$\boxed{4.3.17}$ Hvis a_n er konvergent kan vi finne grenseverdien ved å la $n \to \infty$ på hver side av $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$. La $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Da er $a = \frac{a}{2} + 1$, som har den unike løsningen $a = 2$. Videre, hvis $a_n < 2$, så er

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 < 1 + 1 = 2$$

så følgen er (ved induksjon) oppad begrenset siden $a_0 < 2$. Videre er

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + 1 - a_n = 1 - \frac{a_n}{2} > 1 - 1 = 0$$

så følgen er voksende. Siden følgen er voksende og oppad begrenset vet vi at den er konvergent, og 2 må være grenseverdien siden det er eneste mulige grenseverdi.

$\boxed{5.2.5}$ Betrakt $h(x) = \tan x - x$. Denne funksjonen er kontinuerlig på $((n-\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Merk at

$$\lim_{n\to(n-\frac{1}{2})\pi^+} h(x) = -\infty$$
$$\lim_{n\to(n+\frac{1}{2})\pi^-} h(x) = \infty$$

Siden h er kontinuerlig på et hvert slikt intervall, må det ved skjæringssetningen finnes $c_n \in ((n-\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$ slik at $h(c_n) = 0$, som var det vi skulle vise.

Bemerkning: I oppgave 5.2.5 kan man argumentere for at siden h er kontinuerlig på hvert slikt intervall $((n-\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$ må det finnes $a_n, b_n \in ((n-\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$ slik at $h(a_n) < 0$ og $b_n > 0$. Da har man man oppfylt alle kravene i skjæringssetningen.

$\boxed{6.2.8}$ Først viser vi at det alltid finnes et tall x mellom 0 og x slik at $\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$. Dersom $x = 0$ er dette opplagt sant, så vi kan videre anta at $x \neq 0$.

$f(x) = \ln(1+x)$ er kontinuerlig og kontinuerlig deriverbar for alle $x > -1$, så vi kan bruke middelverdisetningen. Middelverdisetningen gir at det finnes en c mellom 0 og x slik at

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Vi har samtidig at

$$f'(c) = \frac{1}{1+c}$$

som kombinert gir at

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c}$$

som er ekvivalent med

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$$

For $x \geq 0$ er $c > 0$, og dermed er $\frac{1}{1+c} < 1$. Dermed er $\frac{x}{1+c} \leq x$, og det følger at for $x \geq 0$ er $\ln(1+x) \leq x$. For $-1 < x < 0$ er $-1 < c < 0$, som kan skrives om til $0 < 1+c < 1$, eller med andre ord $\frac{1}{1+c} > 1$. Siden x er negativ får vi da $\frac{x}{1+c} < x$, så vi får at $\ln(1+x) < x$.

Totalt har vi da $\ln(1+x) \leq x$ for alle $x > -1$, som var det vi skulle vise.

7.1.7 Høyden på renna er $20\sin\theta$, og bredden på siderenna er $20\cos\theta$. Arealet av tverrsnittet blir dermed (se gjerne på tverrsnittet som bestående av to trekanter og et rektangel)

$$A = 20 \cdot 20\sin\theta + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20\sin\theta \cdot 20\cos\theta$$

Dette skriver vi om til

$$A = 200\sin(2\theta) + 400\sin\theta$$

Vi deriverer dette uttrykket med hensyn på θ og får

$$A'(\theta) = 400\cos(2\theta) + 400\cos\theta = 400(\cos(2\theta) + \cos\theta)$$

Vi setter dette lik 0 for å finne kritiske punkter. Da må vi løse $\cos(2\theta) + \cos(\theta) = 0$. Vi har at

$$\cos(2\theta) = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = (\cos\theta)^2 - (1 - (\cos\theta)^2) = 2(\cos\theta)^2 - 1$$

så vi må løse

$$2(\cos\theta)^2 + \cos\theta - 1 = 0$$

Denne annengradslikingen har løsningene $\cos\theta = -1$ og $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Førstnevnte gir en vinkel $\theta = \pi$, som gir tversnittareal 0. Dette må være et minimumspunkt. Den andre løsningen, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ gir $\theta = \frac{\pi}{3}$, som må være et maksimumspunkt.

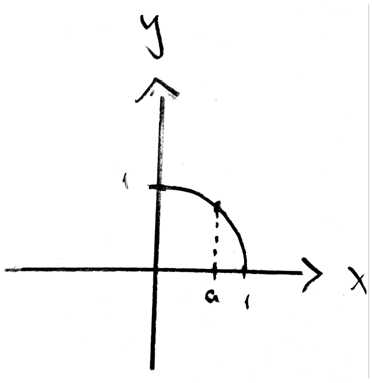
8.5.4 Vi skriver litt om på summen for å identifisere den som en Riemannsum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

Dette gjenkjenner vi som en Riemannsum med $f(x) = \sqrt{x}$, utvalg $c_i = \frac{i}{n}$, og $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{1}{n}$. Da blir nedre integrasjonsgrense 0 og øvre integrasjonsgrense 1. Altså er

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{2}{3}$$

8.6.15 En sirkel er beskrevet av likningen $x^2 + y^2 = 1$.



Vi begrenser oss til $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,1]$. Det bores et sylindrisk hull i kula med radius $a < 1$, så vi får halve volumet av kula ved å rotere grafen $y = \sqrt{1-x^2}$ fra $x = a$ til $x = 1$ om y-aksen. Med andre ord er

$$\frac{1}{2}V = \int_a^1 2\pi x f(x) dx = \pi \int_a^1 2x\sqrt{1-x^2} dx$$

La $u = 1 - x^2$, $du = -2xdx$. Dette gir

$$\int 2x\sqrt{1-x^2}dx = -\int \sqrt{u}du = -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Da er

$$\frac{1}{2}V = \pi\big[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\big]_a^1 = \pi(-\frac{2}{3}(1-1^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(1-a^2)^{\frac{3}{2}}) = \frac{2\pi}{3}(1-a^2)^{\frac{3}{2}}$$

så hele volumet er

$$V = \frac{4\pi}{3}(1-a^2)^{\frac{3}{2}}$$

$\boxed{9.1.6}$ Vi bruker delvis integrasjon. Sett $u = \ln x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, som gir $u' = \frac{1}{x}$ og $v = 2\sqrt{x}$. Da får vi

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \ln x \cdot 2\sqrt{x} - \int \frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$$

$\boxed{9.5.12}$ Vi kaller integranden for $f(x)$ og skriver om

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2x^2+2k} - \frac{k}{x+1} = \frac{x(x+1) - k(2x^2+2k)}{(2x^2+2k)(x+1)} \\ &= \frac{x^2 + x - 2kx^2 - 2k^2}{(2x^2+2k)(x+1)} = \frac{x^2(1-2k) + x - 2k^2}{(2x^2+2k)(x+1)} \end{aligned}$$

Vi må nå dele opp i noen forskjellige tilfeller.

Hvis $k < \frac{1}{2}$ finnes det $a_k \geq 1$ slik at $f(x) > 0$ for $x \geq a_k$.

Hvis $k > \frac{1}{2}$ finnes $a_k \geq 1$ slik at $f(x) < 0$ for $x \geq a_k$.

I begge tilfeller kan vi kjøre grensesammenlikningstest mot $\frac{1}{x}$ (grensesammenlikning krever positiv integrand, men om $k > \frac{1}{2}$ kan vi se på $-f(x)$ i stedet for). Vi har at

$$\int_1^{a_k} \frac{1}{x} dx < \infty$$

uansett, så det er bare $\int_{a_k}^{\infty} \frac{dx}{x}$ som betyr noe. Men vi har at

$$\int_{a_k}^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$$

Grensesammenlikning for $k < \frac{1}{2}$ gir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2(1-2k)+x-2k^2}{(2x^2+2k)(x+1)}}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1-2k)+x^2-2k^2x}{2x^3+2x^2+2kx+2k} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(1-2k)+\frac{1}{x}-2k^2\frac{1}{x^2}}{2+2\frac{1}{x}+2k\frac{1}{x^2}+2k\frac{1}{x^3}} = \frac{1-2k}{2} > 0
\end{aligned}$$

Så grensesammenlikning gir at integralet divergerer. Om $k > \frac{1}{2}$ kjører vi samme test for $-f$ og får grensen $-\frac{1-2k}{2} > 0$. Vi konkluderer med at integralet divergerer for $k \neq \frac{1}{2}$.

Det gjenstår så å se på $k = \frac{1}{2}$. Da har vi integralet

$$I = \int_1^{\infty} (\frac{x}{2x^2+1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}) dx = \lim_{y\to\infty} \int_1^{y} (\frac{x}{2x^2+1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}) dx$$

Setter $u = 2x^2+1$, som gir $du = 4xdx$, og dermed får vi

$$\int \frac{x}{2x^2+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \ln|u| + C = \frac{1}{4} \ln(2x^2+1) + C$$

og dermed blir

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{y\to\infty} \big[\frac{1}{4}\ln(2x^2+1) - \frac{1}{2}\ln|x+1|\big]_1^y = \lim_{y\to\infty} \big[\frac{1}{4}\ln\big(\frac{2x^2+1}{(x+1)^2}\big)\big] \\
&= \lim_{y\to\infty} \big(\frac{1}{4}\ln\big(\frac{2y^2+1}{(y+1)^2}\big) - \frac{1}{4}\ln\big(\frac{2\cdot 1^2+1}{(1+1)^2}\big)\big) = \frac{1}{4}\ln\big(\lim_{y\to\infty} \frac{2y^2+1}{y^2+2y+1}\big) - \frac{1}{4}\ln(\frac{3}{4})
\end{aligned}$$

Siden ln er kontinuerlig kunne vi flytte lim innenfor. Har at

$$\lim_{y\to\infty} \frac{2y^2+1}{y^2+2y+1} = \lim_{y\to\infty} \frac{2+\frac{1}{y^2}}{1+2\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}} = 2$$

så vi får

$$I = \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}\ln(\frac{2}{\frac{3}{4}}) = \frac{1}{4}\ln(\frac{8}{3})$$

10.1.10 Vi finner først en antiderivert av $\frac{2}{x(1+x^2)}$. For dette bruker vi delbrøksoppspaltning.

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \\
\Longrightarrow & 2 = A(1+x^2) + Bx\cdot x + Cx = A + Cx + (A+B)x^2 \\
\Longrightarrow & A = 2, \quad B = -A = -2, \quad C = 0 \\
\Longrightarrow & \frac{2}{x(1+x^2)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Da finner vi at

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x(1+x^2)}dx &= \int (\frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2})dx = 2\ln|x| - \ln(1+x^2) + C \\
&= \ln(x^2) - \ln(1+x^2) + C = \ln(\frac{x^2}{1+x^2}) + C
\end{aligned}$$

når $x > 0$. Integrerende faktor blir $e^{\ln(\frac{x^2}{1+x^2})} = \frac{x^2}{1+x^2}$. Vi multipliserer likningen med integrerende faktor:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{1+x^2}y' + \frac{2}{x(1+x^2)}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}y = \frac{x^2}{1+x^2} \\
\Longrightarrow & (e^{\ln(\frac{x^2}{1+x^2})}y)' = \frac{x^2}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Vi integrerer begge sider med hensyn på x

$$\begin{aligned}
e^{\ln(\frac{x^2}{1+x^2})}y &= \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx \\
&= x - \arctan x + C
\end{aligned}$$

Dette gjør vi om til

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\ln(\frac{x^2}{1+x^2})}(x - \arctan x + C) = \frac{1+x^2}{x^2}(x - \arctan x + C) \\
&= C(1 + \frac{1}{x^2}) + \frac{1}{x} + x - \frac{\arctan x}{x^2} - \arctan x
\end{aligned}$$