Oppgave 1.1.2

Vi skal bevise at

$$11 \cdot 17 \cdot 19 \neq 81 \cdot 43$$

uten å regne ut noe. Venstre side er allerede faktorisert i primtall. Vi observerer også at 43 er et primtall, siden det ikke er delelig med $2, 3$ eller 5. (Vi kan utelukke andre primfaktorer siden $7^2 = 49 > 43$, med andre ord $7 > \sqrt{43}$). Høyre side har primtallsfaktoriseringen

$$3^4 \cdot 43$$

og ut fra Teorem 1.1.1, Aritmetikkens fundamentalteorem, følger det at

$$11 \cdot 17 \cdot 19 \neq 81 \cdot 43$$

Oppgave 1.1.6

1. $\sum_{k=0}^{8}(2k+3) = 3+5+7+9+11+13+15+17+19 = \sum_{m=1}^{9}(2m+1)$
2. $\sum_{m=-2}^{4}(m+2)\cdot 3^m = 0\cdot 3^{-2}+1\cdot 3^{-1}+2\cdot 3^0+3\cdot 3^1+4\cdot 3^2 = \sum k = 0^6 k\cdot k^{k-2}$
3. $$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{10} x^m y^{1-m} &= x^0y^1 + x^1y^0 + x^2y^{-1} + x^3y^{-2} + \cdots + x^9y^{-8} + x^10y_{-9} \\ &= \sum_{m=1}^{11} x^{m-1}y^{2-m}\end{aligned}$$

Oppgave 1.2.1

Vi skal vise ved induksjon at

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{1}$$

P_n er her (1).
P_1 holder: $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$.
Vi antar så at P_k holder, altså at følgende er sant:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1) \tag{2}$$

Vi har da

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i+(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}\cdot 2(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

hvor vi for andre likhetstegn har brukt at P_k er sann. Altså holder P_{k+1}, og P_n er sann.

Oppgave 1.2.2

I denne oppgaven identifiserer vi

$$P_n\colon \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{3}$$

Vi ser først og fremst at P_1 er sann, det vil si

$$P_1\colon \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$$

Vi antar så at P_k holder, altså at $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$. Da kan vi vise at P_{k+1} også holder

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Den felles faktoren $(k+1)$ kan nå settes utenfor og vi regner videre

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= (k+1)(\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)) = (k+1)\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6} \\ &= (k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\end{aligned}$$

altså holder P_{k+1}. Formelen P_n holder for alle $n \in N$.

Oppgave 1.2.14

Vi oppfatter oppskriften slik at det blir **en** ny sirkel for hver rekke.

1. Etter det i-te laget ovenfra legges det til $i+1$ nye sirkler. Totalt har vi da: $1+2+3+\cdots\ n$ sirkler i det n-te laget. Fra Oppgave 1.2.1 vet vi at

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

2. Vi skal vise at det totale antall bokser i de n øverste lagene er

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \tag{4}$$

Vi gjør dette ved induksjon med P_n som

$$P_n\colon \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \tag{5}$$

P_1 er opplagt riktig. Anta så at P_k er riktig, det vil si, anta

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} \tag{6}$$

er sant. Vi regner så ut

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{i(i+1)}{2} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{i(i+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\ &= (k+1)(k+2)(\frac{k}{6} + \frac{3}{6})\\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}\end{aligned}$$

hvor vi har brukt P_k for å få den andre likheten. Dette viser at P_{k+1} også er sann. Altså holder P_n for alle n.

Oppgave 1.5.1

1. Vi skal utføre polynomdivisjon $P(x)\colon Q(x)$ med $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4$ og $Q(x) = x - 3$. Vi får

$$\begin{array}{l}
\big(\;\;3x^3 \;+ 2x^2 \;+ 5x \;\;- 4\big) \div \big(x-3\big) = 3x^2 + 11x + 38 + \dfrac{110}{x-3}\\
\underline{-\,3x^3 \;+ 9x^2}\\
\qquad\quad 11x^2 \;+ 5x\\
\qquad\;\underline{-\,11x^2 + 33x}\\
\qquad\qquad\quad 38x \;\;- 4\\
\qquad\qquad\underline{-\,38x + 114}\\
\qquad\qquad\qquad\quad 110
\end{array}$$

Vi kontrollerer dette:

$$\begin{aligned}&(3x^2 + 11x + 38 + \frac{110}{x-3})(x-3)\\ &= 3x^3 + 11x^2 + 38x - 9x^2 - 33x - 114 + 110 = 3x^2 + 2x^2 + 5x - 4\end{aligned}$$

som stemmer.

2. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 2$, $Q(x) = x^2 + 2x - 1)$. Vi får følgende polynomdivisjon

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^4 - 3x^3 \;\; + 2x^2 \;\; + 3x \;\; - 2\big) \div \big(x^2 + 2x - 1\big) = x^2 - 5x + 13 + \dfrac{-28x + 11}{x^2 + 2x - 1} \\
\underline{\;- x^4 - 2x^3 \quad + x^2\;} \\
\qquad\quad - 5x^3 \;\; + 3x^2 \;\; + 3x \\
\qquad\quad \underline{\;\; 5x^3 + 10x^2 \;\; - 5x\;} \\
\qquad\qquad\qquad 13x^2 \;\; - 2x \;\; - 2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{- 13x^2 - 26x + 13} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 28x + 11
\end{array}
$$

Vi kontrollerer svaret:

$$
\begin{aligned}
&(x^2 - 5x + 13 + \frac{-28x + 11}{x^2 + 2x - 1})(x^2 + 2x - 1) \\
&= x^4 - 5x^3 + 13x^2 + 2x^3 - 10x^2 + 26x - x^2 + 5x - 13 - 28x + 11 \\
&= x^4 - 3x^2 + 2x^2 + 3x - 2
\end{aligned}
$$

Det stemmer.

Oppgave 1.5.3

Vi skal vise at $x = 1$ er en rot i ligningen

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

$x = 1$ gir:

$$1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$$

Dette betyr at $(x-1)$ er en faktor i x^3+4x^2+x-6. Vi utfører polynomdivisjonen

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 + 4x^2 \;\; + x - 6\big) \div \big(x - 1\big) = x^2 + 5x + 6 \\
\underline{\;- x^3 \;\; + x^2\;} \\
\qquad\quad 5x^2 \;\; + x \\
\qquad \underline{- 5x^2 + 5x} \\
\qquad\qquad\quad 6x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{- 6x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Altså har vi $x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$. Vi bestemmer røttene i

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Vi bruker abc-formelen og får

$$x = \frac{1}{2}[-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}] = \frac{1}{2}(-5 \pm 1)$$

altså har vi røttene -3 og -2. Røttene til ligningen

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

er derfor $x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = -2$