Dette er en lett revidert utgave av eksamen fra august 2016.

Oppgave 1 Vis at funksjonen

$$f(x) = \cos x - \frac{1}{2}$$

har nøyaktig ett nullpunkt i intervallet $[0, \pi/2]$.

Oppgave 2 Finn grensen

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^2}.$$

Oppgave 3

i) Beregn integralet

$$\int_0^1 \arctan 2x \, dx.$$

ii) Beregn integralet:

$$\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx.$$

Oppgave 4

i) Løs differensialligningen

$$\frac{y'}{x} + y = 1,$$
$$y(1) = 0.$$

ii) Løs differensialligningen

$$(1 + x^2)yy' - x = 0.$$

Oppgave 5 Finn globalt maksimum og globalt minimum av funksjonen $y = f(x) = x^4 - 1$ på intervallet $[-1, 2]$.

Oppgave 6 Finn eventuelle asymptoter til funksjonen

$$f(x) = xe^{-x} + x + 1 + \frac{1}{x}.$$

Oppgave 7 Vis at funksjonen $f(x) = 2\tan x - x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ har en omvendt (invers) funksjon g. Hva er definisjonsområdet til g? Beregn $g'(0)$.

Oppgave 8 Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved: $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Vis at f er deriverbar i $x = 0$, og at $\lim_{x \to 0} f'(x)$ ikke eksisterer.

Oppgave 9

a) Vis at volumet av en kule med radius r er $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Overflatearealet av en kule med radius r er $4\pi r^2$. Dette er den deriverte av uttrykket for volumet. Forklart kort, uten å gå i detalj, hvorfor det er slik.

b) Volumet av en kule øker med $10\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. Hvor fort øker arealet av overflaten når radien er $1\,\mathrm{cm}$?

Oppgave 10 Anta at $x \in (-\infty, \infty)$. Bruk middelverdisetningen (sekantsetningen) til å vise at

$$\ln(1 + x^2) \leq x^2.$$