LF ØVING 8

Vanlige forbehold, KH

8.1.1 Erstatter vi r med $s/2$ og π med 4, kan vi følge kjegleeksempelet hele vegen og ende opp med

$$\left.\begin{array}{l} V_{ut} \to 4\,(s/2)^2\, h/3 \\ V_{inn} \to \text{samme} \end{array}\right\} \quad \underline{V = \tfrac{1}{3} s^2 h}$$

(s er sidekanten i den kvadratiske grunnflata, h høyden av pyramiden)

8.2.1

$f : [1,2] \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = \frac{1}{x}$.

Vi skal bestemme $\emptyset(\Pi)$ og $N(\Pi)$ når $\Pi = \{1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \dots \frac{9}{5}, 2\}$

Har da

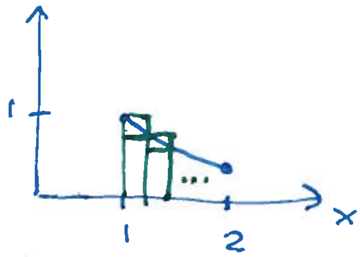
$$\emptyset(\Pi) = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{6/5} + \frac{1}{7/5} + \frac{1}{8/5} + \frac{1}{9/5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 + \frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} + \frac{5}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx \underline{0.746}$$

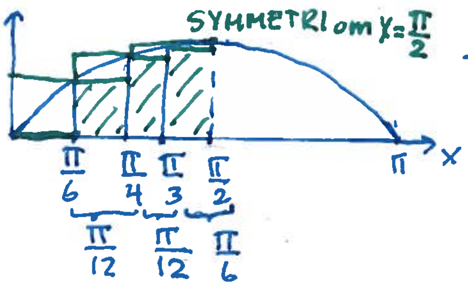
$$N(\Pi) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6/5} + \frac{1}{7/5} + \frac{1}{8/5} + \frac{1}{9/5} + \frac{1}{10/5}\right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \approx \underline{0.646}$$



8.2.3

Skal bestemme $\emptyset(\Pi)$ og $N(\Pi)$ for $f(x) = \sin x$ på $[0, \pi]$ og partisjonen $\Pi = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$



$$\frac{1}{2}\emptyset(\Pi) = \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{12}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right]$$

$$\underline{\emptyset(\Pi) = \frac{\pi}{6}\left[3 + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}\right]}$$

Helt tilsvarende

$$\frac{1}{2}\,N(\Pi) = \frac{\pi}{6}\cdot 0 + \frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right]$$

$$\underline{N(\Pi) = \frac{\pi}{6}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right]}$$

8.2.11 NØTT; ikke eksamensaktuelt

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \text{ irrasj. eller } 0 \\ \frac{1}{q} & \text{hvis } x = \frac{p}{q} \text{ der } (p,q)=1 \end{cases}$

i) $\underline{N(\Pi)=0}$ da irrasj. tall ligger "tett".

ii) Observer først at vi bare har endelig mange x s.a. $f(x) > \frac{1}{100}$:

q må da være mindre enn 100, dvs. et av tallene
$1, 2, 3, 4, \dots, 99$

For hvert av disse fins det endelig mange p-er ($p \le q$). Altså fins det bare et endelig antall $x \in [0,1]$ med $f(x) > \frac{1}{100}$.

Vi kan nå danne en øvre trappesum med vilkårlig smale rektangler om disse endelig mange punktene, areal tilsammen så lite vi måtte ønske, f.eks. < 0.01. Resten av rektanglene har areal $< 0.01\cdot 1$, og $\underline{\varnothing(\Pi) < 2\cdot 0{,}01}$ (!) - Ønsker vi $\varnothing(\Pi) < \varepsilon$ starter vi med $10^{-m} < \varepsilon/2$.
(Husk BEMERKNING før Setning 8.2.3) Se en annen, litt mer detaljert variant på siste side!

8.2.16 Heller ikke eksamensaktuelt bevis!

a) $c=0$ trivielt. $c\neq 0$: En trappesum for $c\,f(x)$ kan oppfattes som c ganger en trappesum for $f(x)$.

b) Gitt $\inf_{\Pi}\varnothing(\Pi|f) = \sup_{\Pi} N(\Pi|f)$, $\inf_{\Pi}\varnothing(\Pi|g) = \sup_{\Pi} N(\Pi,g)$
(Heretter underforstås "Π")

Å vise: * $\inf \varnothing(\Pi|f+g) = \sup N(\Pi|f+g)$

Bevis: (1) $\inf\varnothing(\Pi|f+g) \ge \sup N(\Pi|f+g)$ alltid

Dessuten $\varnothing(\Pi|f+g) \le \varnothing(\Pi|f) + \varnothing(\Pi|g)$ Tegn figur!

og (2) $\inf\varnothing(\Pi|f+g) \le \inf[\varnothing(\Pi|f)+\varnothing(\Pi|g)]$

$= \inf\varnothing(\Pi|f) + \inf\varnothing(\Pi|g)$ Oppg 2.3.6

$\overset{\text{gitt}}{=} \sup N(\Pi|f) + \sup N(\Pi|g)$

$= \sup N(\Pi|f+g)$ Oppg. 2.3.6

* følger av (1) og (2) ∎

8.3.1

a) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = \underline{2}$

b) $\int_0^2 2x^3 \, dx = 2\int_0^2 x^3 dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 2\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{4}\cdot 0^4\right) = \underline{8}$

c) $\int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - (-e^0) = \underline{1 - e^{-1}}$

d) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\arcsin x\right]_{-1/2}^{1/2} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \underline{\frac{\pi}{3}}$

e) $\int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln x\right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = \underline{1}$

f) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan\right]_1^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \underline{\frac{\pi}{12}}$

8.3.7

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\substack{L'H \\ + A.FT}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{1} = \underline{1}$

Bmk $\lim_{x\to 0} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$ da integranden går mot 1, og integrasjonsvegen går mot 0. ($\int_0^x e^{-t^2} dt \le \int_0^x 1 \, dt$ når $x>0$)

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x e^{1/t} dt}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{\substack{L'H \\ + A.FT}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}}{2x} = \underline{0}$

Bmk $\int_1^x e^{1/t} dt \to \infty$ når $x \to \infty$ da $\int_1^x e^{1/t} dt \ge \int_1^x 1 \, dx = x - 1 \to \underline{\infty}$.

4

8.3.7 c)

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt}{\int_0^{x^2} t\,e^{\sqrt{t}}\,dt} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\int_0^{u} \frac{\sin t}{t}\,dt}{\int_0^{u} t\,e^{\sqrt{t}}\,dt} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

da integrandene er begrenset når $u \to 0^+$.

Altså ved L'Hopital og Analysens fu. teorem:

$$L = \underbrace{\lim_{u\to 0^+} \frac{\frac{\sin u}{u}}{u\,e^{u}}} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\sin u}{u^2 e^{u}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{u\to 0^+} \frac{\cos u}{(2u+u^2)e^{u}} = \underline{\infty}$$

(*) Kan se $L=\infty$ allerede her
teller $\to 1$, nevner $\to 0^+$

Merk Vi kunne også brukt kjerneregelen som beskrevet i Eks. 8.3.7. Generelt, gitt

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

der vi skal finne $G'(x)$. Her er øvre grense i integralet en funksjon av x, og vi må bruke kjerneregelen! La $u = g(x)$ og se på

$$F(u) = \int_a^{u} f(t)\,dt$$

Da er $G(x) = F(g(x))$, og kjerneregelen gir

$$G'(x) = \underline{F'}(g(x))\,g'(x) = \underline{f}(g(x))\,g'(x)$$

der vi har benyttet at $\underline{F'(u) = f(u)}$, som følger av analysens fundamentalteorem.

(Har lent meg på Klara Hvebergs innledning til Oppgave 8.3.6)

Oppgave 8.2.11 – en kortfattet løsningsskisse

Anta at f og g er to begrensede funksjoner på $[a, b]$, og at $f(x) = g(x)$ for alle $x \in [a, b]$ med et endelig antall unntak. Da er

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Beviset nedenfor er nesten unødvendig detaljert. Hvis du tegner en figur, er det umiddelbart opplagt hva som foregår.

Bevis. Det er nok å vise dette dersom f og g avviker i bare ett punkt ξ. Da følger det generelle tilfelle ved induksjon.

La M være så stor at $|f(x)| \le M$ og $|g(x)| \le M$ for alle $x \in [a, b]$. Anta at $\varepsilon > 0$ er gitt, og velg en partisjon Π med maskevidde $< \varepsilon$. Pass på at $\xi \notin \Pi$, slik at $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ for presis én i.

Så er $\O(\Pi \mid f) - \O(\Pi \mid g) \le 2M(x_i - x_{i-1}) < 2M\varepsilon$, for alle leddene i summene som definerer $\O(\Pi \mid f)$ og $\O(\Pi \mid g)$ har samme verdi, med unntak av ledd nummer i. Og det i-te leddet ligger i $[-M(x_i - x_{i-1}), M(x_i - x_{i-1})]$ for begge funksjonene, så der er avviket høyst $2M(x_i - x_{i-1})$.

Vi har dermed

$$\O(\Pi \mid g) + 2M\varepsilon > \O(\Pi \mid f) \ge \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

for alle tilstrekkelig fine partisjoner Π, og derfor

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,dx + 2M\varepsilon \ge \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Siden dette gjelder enhver positiv ε, må

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,dx \ge \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Bytter vi om f og g, får vi den motsatte ulikheten. □

Nå anvender vi resultatet ovenfor på funksjonen f gitt i oppgaven. For en gitt $\varepsilon > 0$, la

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dersom } f(x) < \varepsilon, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Så er $f(x) = f_\varepsilon(x)$ for alle $x \in [0, 1]$ unntatt et endelig antall, og siden $f_\varepsilon(x) < \varepsilon$ for alle $x \in [0, 1]$, blir

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \overline{\int_0^1} f_\varepsilon(x)\,dx \le \varepsilon.$$

Men dette gjelder alle positive ε, så

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx \le 0.$$

Samtidig er

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx \ge 0$$

fordi $f(x) \ge 0$ for alle x. Dermed er f integrerbar, og

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$