LØSNING:

MA 1101, ØVING 3, H2016

4.3 Oppg. 1a, s. 195

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^4+2n}{3n^4-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{8+\frac{2}{n^3}}{3-\frac{7}{n^4}} = \underline{\frac{8}{3}} \quad \left(\begin{matrix}\text{Ref.}\\ 4.3.3.\\ (iv)\end{matrix}\right)$$

Oppg. 3c, s. 196

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\cancel{n^2}+n)-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \underline{\frac{1}{2}}$$

Oppg. 4b, s. 196

Vi skal bevise at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin n}{n} = 0$$

ut fra def. 4.3.1. $\varepsilon > 0$.

Vi minner om at $|\sin x| \leq 1$ for alle x.

Vi velger så $N > \frac{2}{\varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}$.

(Minner om Arkimedes prinsipp, s. 88).

Vi har da:

$$\left|\frac{2\sin n}{n}\right| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon \quad \text{når} \quad n \geq N$$

siden $2/n \leq 2/N < \varepsilon$. Altså:

$$\underline{\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin n}{n} = 0}$$

Oppg. 17, s. 197

$\{a_n\}$ er gitt ved: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$

Vi må først vise at følgen $\{a_n\}$ konvergerer.

(ØVING 3, H2015)

Vi skal bevise ved induksjon at

$$a_n \in [1,2]$$

for alle $n \geq 1$. Vi har:

$$a_1 = \frac{a_0}{2} + 1 = 1$$

Vi antar så at $a_k \in [1,2]$ for $k \in \mathbb{N}$.
Vi har da videre:

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + 1 \in [1,2]$$

siden $a_{k+1} \geq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \geq 1$ og

$a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + 1 \leq 2$ siden $a_k \leq 2$.

Altså vil $a_n \in [1,2]$ for alle $n \geq 1$.

Dernest skal vi bevise at $a_n \leq a_{n+1}$ for alle $n \geq 1$. Vi har: $a_2 = \frac{a_1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} > a_1 = 1$

Anta at $a_k \overset{*}{\leq} a_{k+1}$. For å fullføre induksjonen må vi da bevise at

$$a_{k+2} \geq a_{k+1}$$

Vi har:

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1}}{2} + 1 \overset{\text{INDUKSJONSANT. } *}{\geq} \frac{a_k}{2} + 1 = a_{k+1}$$

Altså er følgen $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ monotont voksende med øvre skranke 2. og nedre skranke 1. Ut fra 4.3.9 Teorem vil da følgen konvergere: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in [1,2]$

Siden $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a$, har vi: $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n-1}}{2} + 1\right) = \frac{a}{2} + 1$.

$a = \frac{a}{2} + 1$ gir $\frac{a}{2} = 1$, d.v.s $\underline{\lim_{n\to\infty} a_n = a = 2}$.

5.1 Oppgave 1, s. 219

(a) Vi skal finne definisjonsmengden for

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

Må ha $x+1 \geq 0$. D.v.s. $D_f = [-1, \infty)$.

(c) Vi skal finne definisjonsmengden for

$$f(x) = \ln(\sin x)$$

x må være slik at $\sin x > 0$. Altså

$$D_f = (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup \ldots \cup (2k\pi, (2k+1)\pi) \ldots$$
$$\cup (-\pi, 0) \cup (-2\pi, -\pi) \cup \ldots \cup (-2k\pi, (-2k+1)\pi)$$
$$= \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} (2m\pi, (2m+1)\pi)$$

Oppgave 5a, s. 219

Vi skal bevise at funksjonen

$$f(x) = 2x + 1$$

er kontinuerlig i $x = 2$ ved å benytte def. 5.1.1. Vi har $f(2) = 5$.
La $\varepsilon > 0$ være gitt. Vi har da:

$$|f(x) - f(2)| = |(2x+1) - 5| = |2x - 4|$$
$$= 2|x-2|.$$

Dette indikerer at vi bør velge $\delta = \varepsilon/2$. Vi får da:

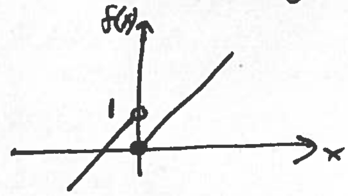
$$|f(x) - f(2)| = 2|x-2| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

når $|x - 2| < \delta$. Altså f er kontinuerlig i $x = 2$.

Oppgave 6a, s. 219

Vis vha def. 5.1.1 at f <u>ikke</u> er kontinuerlig i $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$



Vi observerer at $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$. Videre er $f(0) = 0$.

Det betyr at dersom $\varepsilon < 1$ (f. eks $\varepsilon = \frac{1}{2}$), så vil det uansett hvor liten vi velger $\delta > 0$ finnes noen x slik at $|x - 0| < \delta$ og $|f(x) - f(0)| \geq \varepsilon$

M.a.o. $|f(x) - f(0)| = |x+1-0| = |x+1| \geq \varepsilon$ for $-\delta < x < 0$.

Siden det finnes ε-er som ikke kan pareres av noen δ er funksjonen <u>ikke</u> kontinuerlig i $x = 0$.

Oppg. 6 b, s. 219

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

Velges f. eks. $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ får vi $f(x_n) = 1$. Siden $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, finnes det ingen $\delta > 0$, s.a. når $|x - 0| < \delta$, så vil $|f(x) - f(0)| < \frac{1}{2}$. Altså er f <u>ikke</u> kontinuerlig i $x = 0$

Oppg. 6 c, s. 219

Funksjonen $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ er ikke definert i $x = 1$. f er derfor ikke kontinuerlig i $x = 1$.