

1.1 Opgg. 2.

Vi skal bevise at

$$11 \cdot 17 \cdot 19 \neq 81 \cdot 43$$

uten å regne ut de to sidene.

11 · 17 · 19 er faktorisert i primtall.

Vi observerer at 43 også er et primtall siden det er öppenbart ikke er delbart med 2, 3, 5. (Alle primfaktorer kan utelukkies siden $7^2 = 49 > 43$, m.a.o. $7 > \sqrt{43}$. TENK OVER DETTE!)

Höyneside har dermed primtallsfaktoriseringen:

$$3^4 \cdot 43.$$

Utanfra 1.1.1 ARITMETIKKENS FUNDAMENTALTEOREM (ENTYDIGHETEN) følger det dermed at $11 \cdot 17 \cdot 19 \neq 81 \cdot 43$.

Opgg. 6, s. 32

$$(a) \sum_{k=0}^9 (2k+3) = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 \\ = \sum_{m=1}^9 (2m+1)$$

$$(b) \sum_{m=-2}^4 (m+2)3^m = 0 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^2 \\ + 5 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^4 \\ = \sum_{k=0}^6 k \cdot 3^{k-2}$$

$$(c) \sum_{m=0}^{10} x^m y^{1-m} = x^0 y^1 + x^1 y^0 + x^2 y^{-1} + x^3 y^{-2} + \dots \\ + x^9 y^{-8} + x^{10} y^{-9} \\ = \sum_{m=1}^{11} x^{m-1} y^{2-m}$$

1.2 Oppg 1

Viser ved induksjon at:

$$\textcircled{*} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

P_n er hers.

$$P_1 \text{ holder: } 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2.$$

Antar at P_k holder:

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{1}{2} k(k+1) \quad (P_k \text{ benyttes})$$

Vi har da:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^k i + (k+1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} k(k+1) + (k+1)$$

$$= \frac{1}{2} k(k+1) + \frac{1}{2} \cdot 2(k+1)$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2). \quad \text{Altså holder } P_{k+1}, \text{ og } P_n \text{ persann.} \blacksquare$$

Oppg. 2 på sistre side!

Oppg. 14.

Vi oppfatter oppskriften s.a. det blir en my sirkel for hver rekke.

(a) Etter det i -te laget overfra legges det til $i+1$ nye sirkler. Totalt har vi da:

$$1+2+3+\cdots+n \text{ sirkler i det } m\text{-te laget}$$

$$\text{Fra oppg. 1, s. 38 vet vi: } 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

(b) Skal visse at det totale antall bokser i de m øverste lagene er $\frac{1}{6} m(m+1)(m+2)$

Vi formulerer induksjonsbevis for dette med

$$P_m: \sum_{i=1}^m \frac{i(i+1)}{2} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

P_1 er opplagt $\sum_{i=1}^1 \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ riktig.

$$P_k \Rightarrow P_{k+1}: \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i(i+1)}{2} = \sum_{i=1}^k \frac{i(i+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\stackrel{P_m \text{ persann}}{=} \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

Altså holder P_n for alle n . \blacksquare

(3)

(Föring 1. H 2016)

1.5 Oppg. 1.

(a) Vi skal utføre polynom-divisjon

$$P(x) : Q(x) \quad \text{med}$$

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4 ; \quad Q(x) = x - 3.$$

$$\begin{array}{r} (3x^3 + 2x^2 + 5x - 4) : (x - 3) = 3x^2 + 11x + 38 \\ - (3x^3 - 9x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11x^2 + 5x - 4 \\ - (11x^2 - 33x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38x - 4 \\ - (38x - 114) \end{array}$$

$$110$$

$$\begin{aligned} & \text{KONTROLL:} \\ & (3x^2 + 11x + 38 + \frac{110}{x-3})(x-3) \\ & = 3x^3 + 11x^2 + 38x \\ & \quad - 9x^2 - 33x - 114 + 110 \\ & = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4 \\ & \text{som stemmer!} \end{aligned}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv 3x^2 + 11x + 38 + \frac{110}{x-3}.$$

$$(b) P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 2 ; \quad Q(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$\begin{array}{r} (x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 2) : (x^2 + 2x - 1) = x^2 - 5x + 13 \\ - (x^4 + 2x^3 - x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5x^3 + 3x^2 + 3x - 2 \\ - (-5x^3 - 10x^2 + 5x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13x^2 - 2x - 2 \\ - (13x^2 + 26x - 13) \end{array}$$

$$-28x + 11$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv x^2 - 5x + 13 + \frac{-28x + 11}{x^2 + 2x - 1}$$

$$\begin{array}{r} (x^2 - 5x + 13 + \frac{-28x + 11}{x^2 + 2x - 1})(x^2 + 2x - 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} = (x^4 - 5x^3 + 13x^2 \\ \quad + 2x^3 - 10x^2 + 26x \\ \quad - x^2 + 5x - 13) \\ \hline - 28x + 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^2 + 2x^2 + 3x - 2 \\ \hline \text{Stemmer!} \end{array}$$

Oppg. 3.Vi skal vise at $x=1$ er rot i likningen:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = 1$$

gir:

$$1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$$

(Øving 1, H2016)

Vi skal finne (mulige) andre røtter.

$$\begin{array}{r} (x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x - 1) = x^2 + 5x + 6 \\ - (x^3 - x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^2 + x - 6 \\ - (5x^2 - 5x) \\ \hline 6x - 6 \\ \hline 6x - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Aleks har si:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1) \cdot (x^2 + 5x + 6)$$

Vi må bestemme røttene i:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

abc-formelen gir:

$$x = \frac{1}{2} [-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}] = \frac{1}{2} [-5 \pm 1] = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

Røttene til ligningen:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

er derfor: $x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = -2$.

1.2 Oppgave 2. Nåle en induksjonsoppgave!

$$P_n : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$P_1 : 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 / 6$ stemmer!

$P_k \Rightarrow P_{k+1}$ (Skal vise P_{k+1} holder når P_k holder):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 \stackrel{\substack{\text{P}_k \text{ sann}}}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &\stackrel{\text{sett felles faktor utenfor } \overline{\overline{\sum}}}{=} \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} \\ &\stackrel{\text{F.eks. abc-formel}}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

Indusjonstrinnet er vist.

Formelen P_n holder for alle $n \in \mathbb{N}$. ■