UTFYLLENDE LF FOR MA1101 EKSAMEN H2014

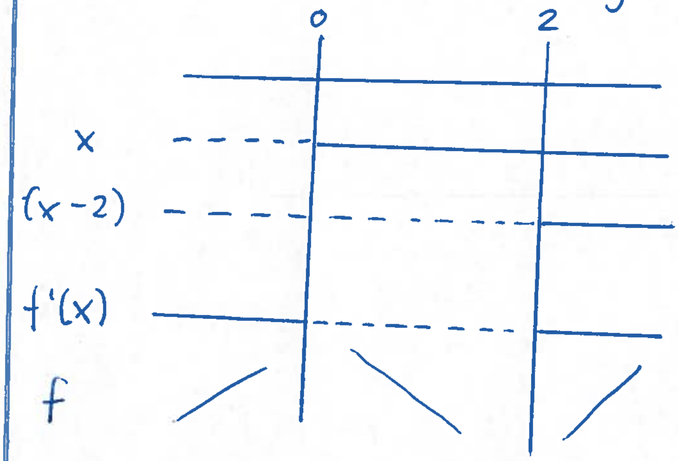
Oppg. 1

Gitt $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

a) Finn alle ekstremalpunkter til f og avgjør hvor f er voksende og avtagende

$f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

$f'(x) = 0$ når $x = 0$ og $x = 2$



f er voksende når $x \leq 0$ og $x \geq 2$

f er avtagende når $0 \leq x \leq 2$

f har maksimumspunkt når $x = 0$, $y = 1$

f har minimumspunkt når $x = 2$, $y = -1/3$

b) Hvor mange nullpunkt har f?

f er kontinuerlig på $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Siden f er strengt voksende på $(-\infty, 0)$ og $(2, \infty)$
strengt avtagende på $(0,2)$
og $f(0) > 0$, $f(2) < 0$, følger det av skjæringssetningen at f har nøyaktig 3 nullpunkt

Oppg. 2

La $h(x) = x^3 + 2x + 2$

Vis at h har en invers funksjon h^{-1} og finn $(h^{-1})'(2)$.

$h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ for alle x

Da er h strengt voksende, og har en invers, h^{-1}

Skal finne $(h^{-1})'(2)$, dvs $y = 2$

$h(x) = x^3 + 2x + 2$ er 2 når $x = 0$

$$(h^{-1})'(2) = \frac{1}{h'(0)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppg. 3

Området under grafen til $f(x) = \sqrt{x \sin x}$ og over x-aksen, $0 \leq x < \pi$ blir rotert om x-aksen. Finn volum av omdreiningslegeme.

Ved skivemetoden:

$$V = \int_0^{\pi} \pi \cdot (f(x))^2 \, dx = \int_0^{\pi} \pi \overset{u}{x} \overset{v'}{\sin x} \, dx$$

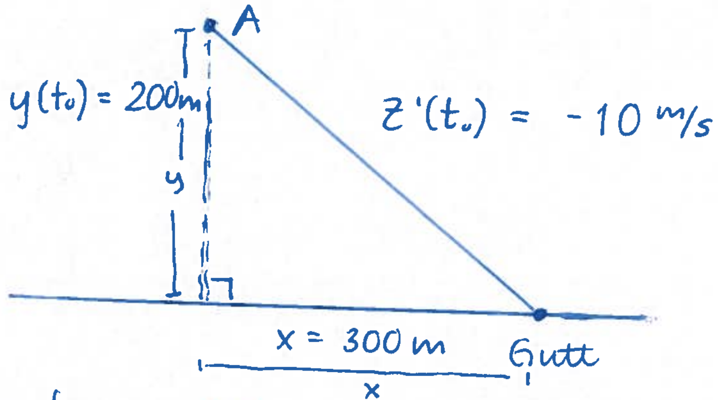
$$= \left[-\pi \overset{u}{x} \overset{v}{\cos x} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \pi \overset{u'}{} \overset{v}{\cos x} \, dx$$

$$= \pi \left[-\pi(-1) - 0 \right] + \left[\pi \sin x \right]_0^{\pi}$$

$$= \pi^2 + \pi(0)$$

$$= \underline{\pi^2}$$

Oppgave 4



Hva er fallskjermhopperens vertikale hastighet ved $t = t_0$?

Generelt gjelder:

$x(t)^2 + y(t)^2 = z(t)^2$, det gir

$$2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + 2 \cdot y(t) \cdot y'(t) = 2 z(t) \cdot z'(t)$$

$x'(t) = 0$ (avstand mellom gutt og landingspunkt er konstant)

$$y'(t) = \frac{z(t) \cdot z'(t)}{y(t)}$$

Ved t_0:
$$z(t_0) = \sqrt{300^2 + 200^2} = \sqrt{130\,000} = \underline{100\sqrt{13}}$$

$$y'(t_0) = \frac{100\sqrt{13} \cdot (-10)}{200} = \underline{-5\sqrt{13} \ m/s}$$

Avstanden avtar med en hastighet på $-5\sqrt{13} \ m/s$

Oppgave 5

La $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & , x \neq 0, x > -1 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

Finn $f'(0)$ hvis den eksisterer.

Ved definisjon av deriverbarhet, $f'(0)$ eksisterer dersom $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ eksisterer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= L'H \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = L'H \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{2} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

Altså er $\underline{f'(0) = -\frac{1}{2}}$

Oppgave 6

Løs $\int \frac{x^2 + x^3 + 1}{x^3(x^2+1)} \, dx$

$$\frac{x^2+x^3+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{x^3+x^2+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{x^3}{x^3(x^2+1)} + \frac{x^2+1}{x^3(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^3}$$

slik at $\int \frac{x^2+x^3+1}{x^3(x^2+1)} \, dx = \int \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^3} \, dx$

$$= \underline{\arctan x - \frac{1}{2} x^2 + C}$$

Oppg. 7

Løs $2y' + \frac{1}{\sqrt{x}} y = e^{-\sqrt{x}}, x > 0$

$$y' + \frac{1}{2\sqrt{x}} y = \frac{1}{2} \cdot e^{-\sqrt{x}}$$

$F(x) = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, multipliserer begge sider med $e^{F(x)} = e^{\sqrt{x}}$

$$e^{\sqrt{x}}\left(y' + \frac{1}{2\sqrt{x}} y\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$(y \cdot e^{\sqrt{x}})' = \frac{1}{2}$$

$$y \cdot e^{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{2} dx$$

$$\underline{y = e^{-\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x + c\right)}$$

Oppg. 8

Anta f, f', f'' er kontinuerlig for alle reelle tall x, og at $|f''(x)| \leq 2$. Anta også at $f(0) = f'(0) = 1$.

Skal vise at 1) $|f'(x)| \leq 2|x| + 1$

2) $|f(2)| \leq 7$

Merk! Det er mulig å vise 2) før 1) dersom det er enklere, evt for å få halv uttelling på oppg. Alternativ løsning ligger på hjemmesida.

1) La $x > 0$:

f kont. og 2 ganger deriverbar

Ved sekantsetningen (middelverdisetn.):

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''(c), \quad c \in (0, x)$$

(oppg. 8 fortsettelse)

Det gir $\quad f'(x) - 1 = f''(c)\,x \leq 2x$

$$f'(x) \leq 2x + 1$$

$$|f'(x)| \leq |2x+1|$$

$$\underline{\leq 2|x| + 1} \quad \text{(trekantulikheten)}$$

Tilsvarende for $x<0$; $x = 0$ ok.

2) $f(2) - f(0) = \int_0^2 f'(x)\,dx \quad \text{(AFT)} \quad (x>0)$

$$f(2) = 1 + \int_0^2 f'(x)\,dx$$

$$|f(2)| \leq 1 + \left|\int_0^2 f'(x)\,dx\right| \quad \text{(trekantulikheten)}$$

$$= 1 + \int_0^2 2|x|+1\,dx$$

$$= 1 + \left[x^2 + x\right]_0^2 \quad (x>0)$$

$$= \underline{7} \qquad \square$$

(Tilsvarende for $x<0$)