

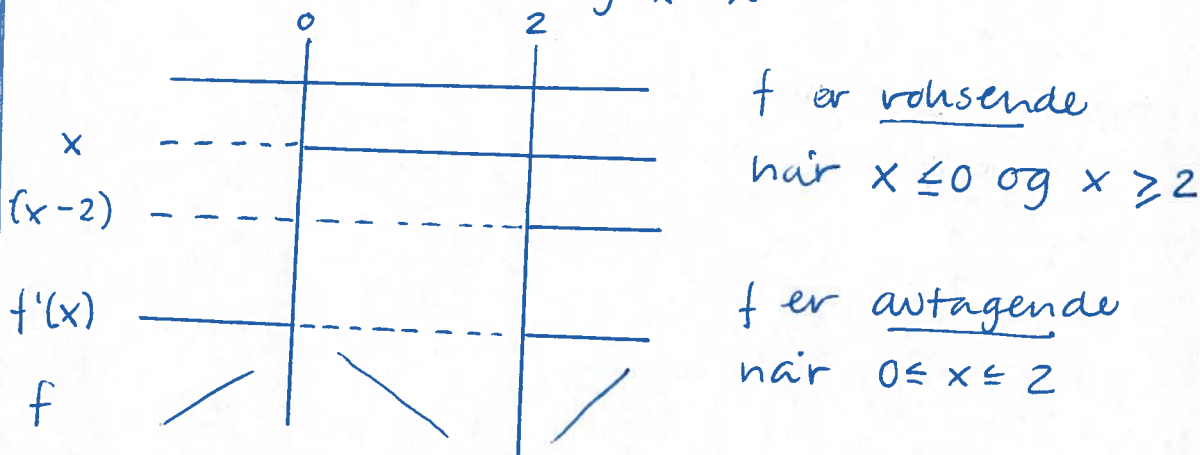
Oppg. 1

Gitt $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

- a) Finn alle ekstremalpunkter til f og avgjør hvor f er voksende og avtagende

$f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

$f'(x) = 0$ når $x = 0$ og $x = 2$



f har maksimumspunkt når $x = 0, y = 1$

f har minimumspunkt når $x = 2, y = -\frac{1}{3}$

- b) Hvor mange nullpunkt har f ?

f er kontinuerlig på \mathbb{R}

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Siden f er strengt voksende på $(-\infty, 0)$ og $(2, \infty)$

strengt avtagende på $(0, 2)$

og $f(0) > 0, f(2) < 0$, følger det av

sljæringssetningen at f har nøyaktig 3 nullpunkt

Oppg. 2

$$\text{La } h(x) = x^3 + 2x + 2$$

Vis at h har en invers funksjon h^{-1} og finn $(h^{-1})'(2)$.

$$h'(x) = 3x^2 + 2 > 0 \text{ for alle } x$$

Da er h strengt voksende, og har en invers, h^{-1} skal finne $(h^{-1})'(2)$, dvs $y=2$

$$h(x) = x^3 + 2x + 2 \text{ er } 2 \text{ når } x=0$$

$$(h^{-1})'(2) = \frac{1}{h'(0)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppg. 3

Området under grafen til $f(x) = \sqrt{x \sin x}$ og over x -aksen, $0 \leq x < \pi$ blir rotert om x -aksen. Finn volum av dreiningsslegeme.

Ved skivemetoden:

$$V = \int_0^{\pi} \pi \cdot (f(x))^2 dx = \int_0^{\pi} \pi x \sin x dx$$

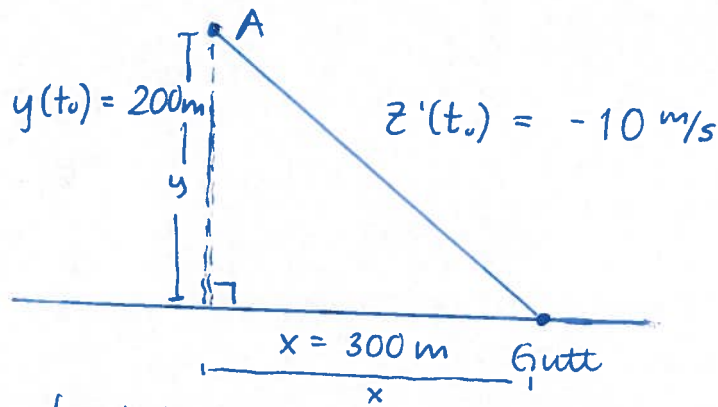
$$= \left[-\pi x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \pi \cos x dx$$

$$= \pi \left[-\pi(-1) - 0 \right] + \left[\pi \sin x \right]_0^{\pi}$$

$$= \pi^2 + \pi(0)$$

$$= \underline{\underline{\pi^2}}$$

Oppgave 4



Hva er fallskjermhopperens vertikale hastighet ved $t = t_0$?

Generelt gjelder:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = z(t)^2, \text{ det gir}$$

$$2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + 2 \cdot y(t) \cdot y'(t) = 2 z(t) \cdot z'(t)$$

$x'(t) = 0$ (avstand mellom gutt og landingspunkt er konstant)

$$y'(t) = \frac{z(t) \cdot z'(t)}{y(t)}$$

$$\begin{aligned} \text{Ved } t_0: \quad z(t_0) &= \sqrt{300^2 + 200^2} \\ &= \sqrt{130\,000} \\ &= \underline{100\sqrt{13}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t_0) &= \frac{100\sqrt{13} \cdot (-10)}{200} \\ &= \underline{-5\sqrt{13} \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Avstanden avtar med en hastighet på $-5\sqrt{13} \text{ m/s}$

Oppgave 5

$$\text{La } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & , x \neq 0, x > -1 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Finne $f'(0)$ hvis den eksisterer.

Ved definisjon av derivbarhet, $f'(0)$ eksisterer

dersom $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ eksisterer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$= \text{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \text{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Altså er $f'(0) = -\frac{1}{2}$

Oppgave 6

$$\text{Løs } \int \frac{x^2 + x^3 + 1}{x^3(x^2 + 1)} dx$$

$$\frac{x^2 + x^3 + 1}{x^3(x^2 + 1)} = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^3(x^2 + 1)} = \frac{x^3}{x^3(x^2 + 1)} + \frac{x^2 + 1}{x^3(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^3}$$

$$\text{Slik at } \int \frac{x^2 + x^3 + 1}{x^3(x^2 + 1)} dx = \int \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^3} dx$$

$$= \underline{\underline{\arctan x - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

Oppg. 7

$$\text{Løs } 2y' + \frac{1}{\sqrt{x}}y = e^{-\sqrt{x}}, x > 0$$

$$y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = \frac{1}{2} \cdot e^{-\sqrt{x}}$$

$F(x) = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, multipliserer begge sider med $e^{F(x)} = e^{\sqrt{x}}$

$$e^{\sqrt{x}}(y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$(y \cdot e^{\sqrt{x}})' = \frac{1}{2}$$

$$y \cdot e^{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{2} dx$$

$$\underline{y = e^{-\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2}x + c \right)}$$

Oppg. 8

Anta f, f', f'' er kontinuerlig for alle reelle tall x , og at $|f''(x)| \leq 2$. Anta også at $f(0) = f'(0) = 1$.

Shal vise at 1) $|f'(x)| \leq 2|x| + 1$

2) $|f(2)| \leq 7$

Merk! Det er mulig å vise 2) før 1) dersom det er enklere, evt for å få halv uttelling på oppg.

Alternativ løsning ligger på hjemmesida.

1) La $x > 0$:

f kont. og 2 ganger deriverbar

Ved sekantsetningen (middelverdisetn.):

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''(c), c \in (0, x)$$

(oppg. 8 fortsettelse)

Det gir $f'(x) - 1 = f''(c)x \leq 2x$

$$f'(x) \leq 2x + 1$$

$$|f'(x)| \leq |2x + 1|$$

$$\leq \underline{2|x| + 1} \quad (\text{trekantulikheten})$$

Tilsvarende for $x < 0$; $x = 0$ ok.

$$2) \quad f(2) - f(0) = \int_0^2 f'(x) dx \quad (\text{AFT})$$

$$f(2) = 1 + \int_0^2 f'(x) dx$$

$$|f(2)| \leq 1 + \left| \int_0^2 f'(x) dx \right| \quad (\text{trekantulikheten})$$

$$\leq 1 + \int_0^2 |f'(x)| dx \quad (\text{trekantulikheten for integraler, se oppg. 8.2.15})$$

i Lindström

se 1) $\leq 1 + \int_0^2 2|x| + 1 dx$

$$= 1 + \int_0^2 2x + 1 dx$$

$$= 1 + \left[x^2 + x \right]_0^2 \quad (x > 0)$$

$$= \underline{7} \quad \square$$