

# LÖSNINGSFORSLAG QUING 6

6.4.2 (a)  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + 17$  på  $[-1, 2]$

$$f'(x) = x^2 - 2 = 0 \quad \text{för } x = \pm\sqrt{2}.$$

$x = -\sqrt{2} < -1$ , så kritiska punkter har vi för  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \sqrt{2}$  och  $x_3 = 2$ . Vi regnade ut  $y$ -verdiene i disse punktene har vi:

$$f(-1) = -\frac{1}{3} + 2 + 17 = \frac{56}{3} \approx 19$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{2}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 17 = -\frac{4}{3}\sqrt{2} + 17 \approx 14$$

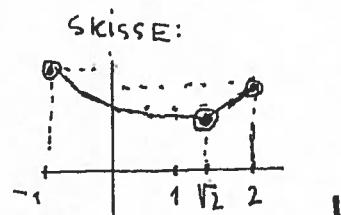
$$f(2) = \frac{8}{3} - 4 + 17 = \frac{47}{3} \approx 15$$

Lokalt maks i endepunktlene  
- - - min i  $x = \sqrt{2}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0, -1 < x < \sqrt{2} \\ f'(x) < 0, \sqrt{2} < x < 2 \end{array} \right\}$$

Globalt maks.  $(-1, \frac{56}{3})$

Globalt min.  $(\sqrt{2}, \frac{51-4\sqrt{2}}{3})$



(e)  $f(x) = |x-2|e^x$  i  $[1, 3]$ .

Har derivat:

$$f(x) = (2-x)e^x \quad \text{i } [1, 2] ; \quad f'(x) = e^x(1-x)$$

$$f(2) = 0$$

$$f(x) = (x-2)e^x \quad \text{i } (2, 3] ; \quad f'(x) = e^x(x-1)$$

$$f'(x) \neq 0 \quad \text{för } x \in (1, 3).$$

Kritiske punkt der  $f'(x)$  ikke eksisterer.

Vi undersøker i  $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2-x)e^x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^x = -e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)e^x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} e^x = e^2$$

Definisjon 6.1.1:  
Dersom grensverdien  
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  eksisterer  
sa er  $f$  derivbar i  $a$

Altså  $f'(2)$  eksisterer ikke!

$$f(1) = 1e^1 = e, \quad f(3) = 1 \cdot e^3$$

$$f(2) = 0$$

Altså har vi globalt maks  $(3, e^3)$

ca relativt

1 2 3

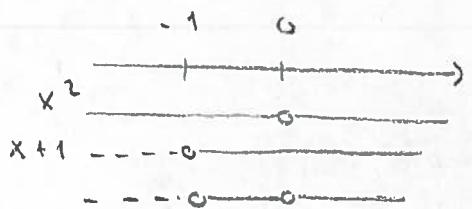
### 6.4.8

$$f(x) = \ln(x^3 + x^2)$$

- a) Ln-funksjonen er bare definert for argumentverdier større enn 0.

Ser utfør på  $x^3 + x^2 > 0$

$$x^2(x+1) > 0$$

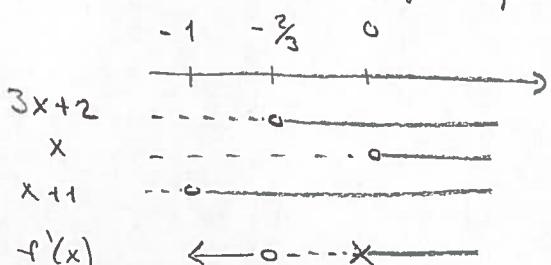


$$D_f : \{(-1, 0) \cup (0, \infty)\}$$

- b) Det er en derivat som angjør hvor f vokser og avtar.

$$f'(x) = \frac{1}{x^3 + x^2} \cdot (3x^2 + 2x) = \frac{3x+2}{x^2+x} = \frac{3x+2}{x(x+1)}$$

Dretter på fortegnslinje:



Korollar 6.2.5 + (Se forelesningsreferat s. ④, mandag 14. september)

Anta at f er kontinuerlig på et intervall I og derivertbar i alle andre punkt i I ...

f er voksende på  $(-1, -\frac{2}{3}]$  og  $(0, \infty)$

f er avtagende på  $[-\frac{2}{3}, 0)$

f har maksimumspunkt for  $x = -\frac{2}{3}$ ,  
(lokalt)

c) Det er den dobbeltderiverte som angir konkavitet.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3(x^2+x) - (3x+2)(2x+1)}{(x^2+x)^2} \\ &= \frac{3x^2 + 3x - 6x^2 - 3x - 4x - 2}{(x^2+x)^2} \\ &= \frac{-3x^2 - 4x - 2}{(x^2+x)^2} \end{aligned}$$

Prøv å faktorisere tilsv. ved a-b-c-formelen:

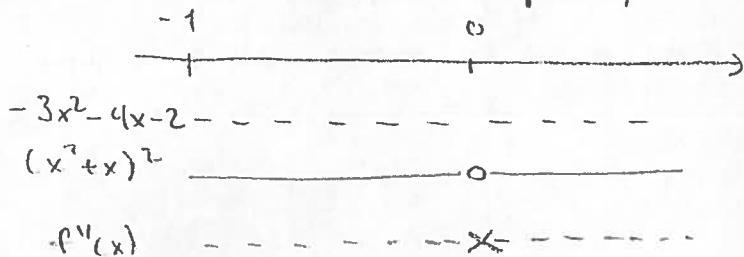
$$-3x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-3) \cdot (-2)}}{2(-3)} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{-6}$$

negativt under røttene,  
så ingen nullpunkt.

$$\Rightarrow -3x^2 - 4x - 2 < 0 \text{ for alle } x.$$

Dette viser  $f''(x)$  på fortignshytte:



$f$  er konkav på  $(-1, 0)$  og på  $(0, \infty)$ .

$$d) f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \approx -0,98 < 0$$

$$f(1) = \ln(1^3 + 1^2) \approx 0,69 > 0$$

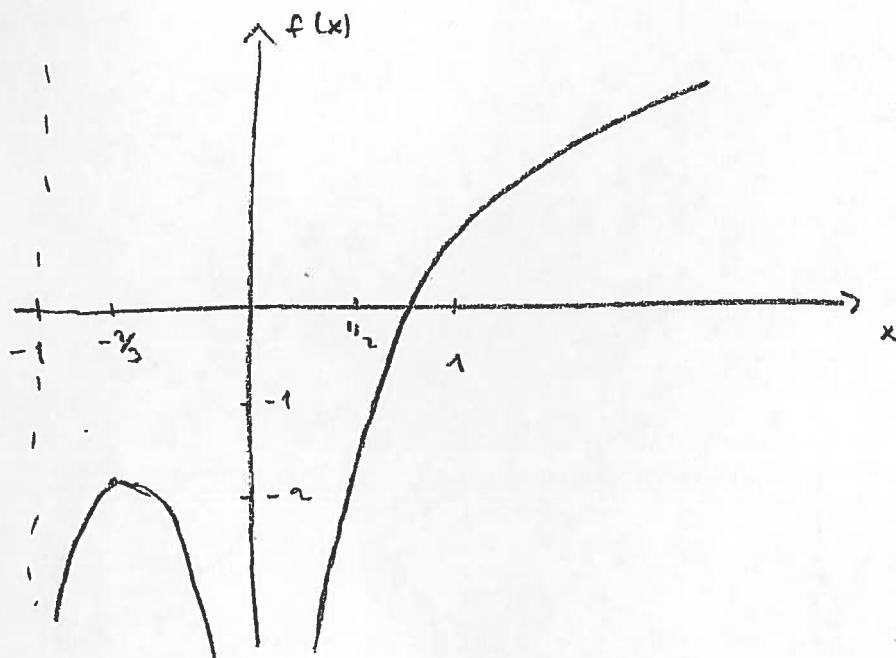
Siden  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$  og  $f(1) > 0$ , og  $f$  er defineret og kontinuerlig på intervallet  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , så har  $f$  minst ett nullpunkt på intervallet  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , i følge steigingssetningen.

Siden  $f'(x) > 0$  på intervallet  $(0, \infty)$  er  $f$  monoton økende her, og har maksimalt ett nullpunkt på dette intervallet.

På intervallet  $(-1, 0)$  er  $f$  monoton økende  
 på intervallet  $(-1, -\frac{2}{3}]$  og monoton avtagende på  $[-\frac{2}{3}, 0]$ .  
 Siden maksimalpunktet på dette intervallet  $(-1, 0)$  er  
 $f(-\frac{2}{3}) \approx -1.9 < 0$  kan ikke  $f$  ha noe nullpunkt på  
 dette intervallet.

Konkluderer med at  $f$  har nøyaktig ett nullpunkt,  
 og at dette nullpunktet er på intervallet  $(\frac{1}{2}, 1)$ .

Slisse av grafen:



6.5

Oppg 1, s. 295

Vi skal finne eventuelle asymptoter for

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

Alebø har si vertikale asymptote  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad y = x \text{ er}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \quad \text{skråasymptote}$$



### 6.5.3

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{(x-1)(x+1)}$$

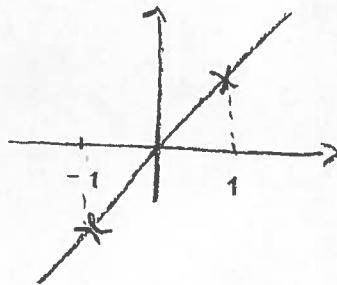
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$\text{Observer at } f(x) = \frac{x^3 - x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)} = x$$

Det vil si at  $f$  er sammenfallende med  $y = x$ , men ikke definert for  $x = -1$  og  $x = 1$

Siden  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = 0$ , viser vi at  $f$  har  $y = x$

som stråsymplote (som sammenfaller med grafen her)



### 6.5.13

$$f(x) = (3x^2 - x^3)^{1/3}$$

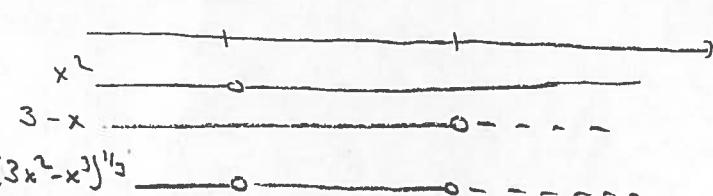
a)  $f(x) = 0$

$$(3x^2 - x^3)^{1/3} = 0$$

$$3x^2 - x^3 = 0$$

$$x^2(3-x) = 0$$

$$\underline{x=0} \vee \underline{x=3}$$

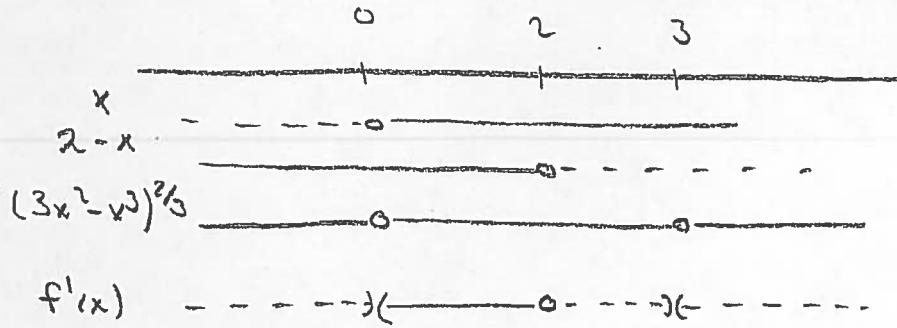


$f$  er positiv for  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$  og negativ for  $x \in (3, \infty)$

$f$  har nullpunktet for  $x=0$  og  $x=3$ .

$$b) f'(x) = \frac{1}{3} (3x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (6x - 3x^2)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{6x - 3x^2}{(3x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x(2-x)}{(3x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}}}$$



$f$  er voksende på  $[0, 2]$  og avtagende på  $(-\infty, 0) \cup [2, \infty)$ .

$f$  har ekstremalpunkt for  $x=0$  og  $x=2$ .

Også mulig ekstremalpunkt for  $x=3$  (siden  $f$  muligens ikke er derivabel her), men siden  $f$  er kontinuert og avtagende både på  $[2, \infty)$  får vi ikke ekstremalpunktet her.

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = (3 \cdot 2^2 - 2^3)^{1/3} = \sqrt[3]{4}$$

Høkant bunnpunkt i  $(0, 0)$ ,

Høkant toppunkt i  $(2, \sqrt[3]{4})$ .

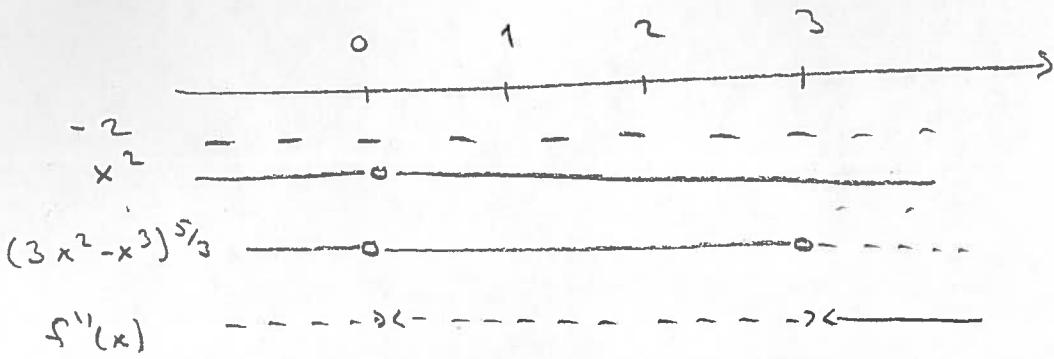
(Kunne vært globalt, men senere får vi at  $\lim f(x) = \infty$ )

$$c) f''(x) = \frac{(2-2x)(3x^2-x^3)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}(3x^2-x^3)^{-\frac{1}{3}}(6x-3x^2)(2x-x^2)}{(3x^2-x^3)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{(2-2x)(3x^2-x^3) - \frac{2}{3}(6x-3x^2)(2x-x^2)}{(3x^2-x^3)^{\frac{5}{3}}}$$

$$= \frac{6x^2 - 2x^3 - 6x^3 + 2x^4 - \frac{2}{3}(12x^2 - 6x^3 - 6x^3 + 3x^4)}{(3x^2-x^3)^{\frac{5}{3}}}$$

$$= \frac{-2x^2}{(3x^2-x^3)^{\frac{5}{3}}}$$



$f$  er konvex på  $(3, \infty)$   
og konkav på  $(-\infty, 0)$  og  $(0, 3)$

a) Ser på  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - x^3)^{1/3} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - x^3)^{1/3} = \infty$

$\left. \begin{array}{l} \text{Ingen horisontale} \\ \text{asymptoter} \end{array} \right\}$

Ser på  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - x^3)^{1/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 - x^3}{x^3} \right)^{1/3}$

 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{x} - 1 \right)^{1/3} = \underline{-1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^2 - x^3)^{1/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x^2 - x^3}{x^3} \right)^{1/3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{x} - 1 \right)^{1/3} = \underline{-1} \end{aligned}$$

Ser så på  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (-1)x] = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - x^3)^{1/3} + x$

$$\begin{aligned} &\stackrel{[-\infty, \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{3}{x} - 1 \right)^{1/3} + 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{[0]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{3}{x} - 1 \right)^{-2/3} \left( -\frac{3}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{x} - 1 \right)^{-2/3} = \underline{1}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Gir } y = -x + 1 \text{ som straumyplot} \\ \text{hår } x \rightarrow \infty. \end{array} \right\}$

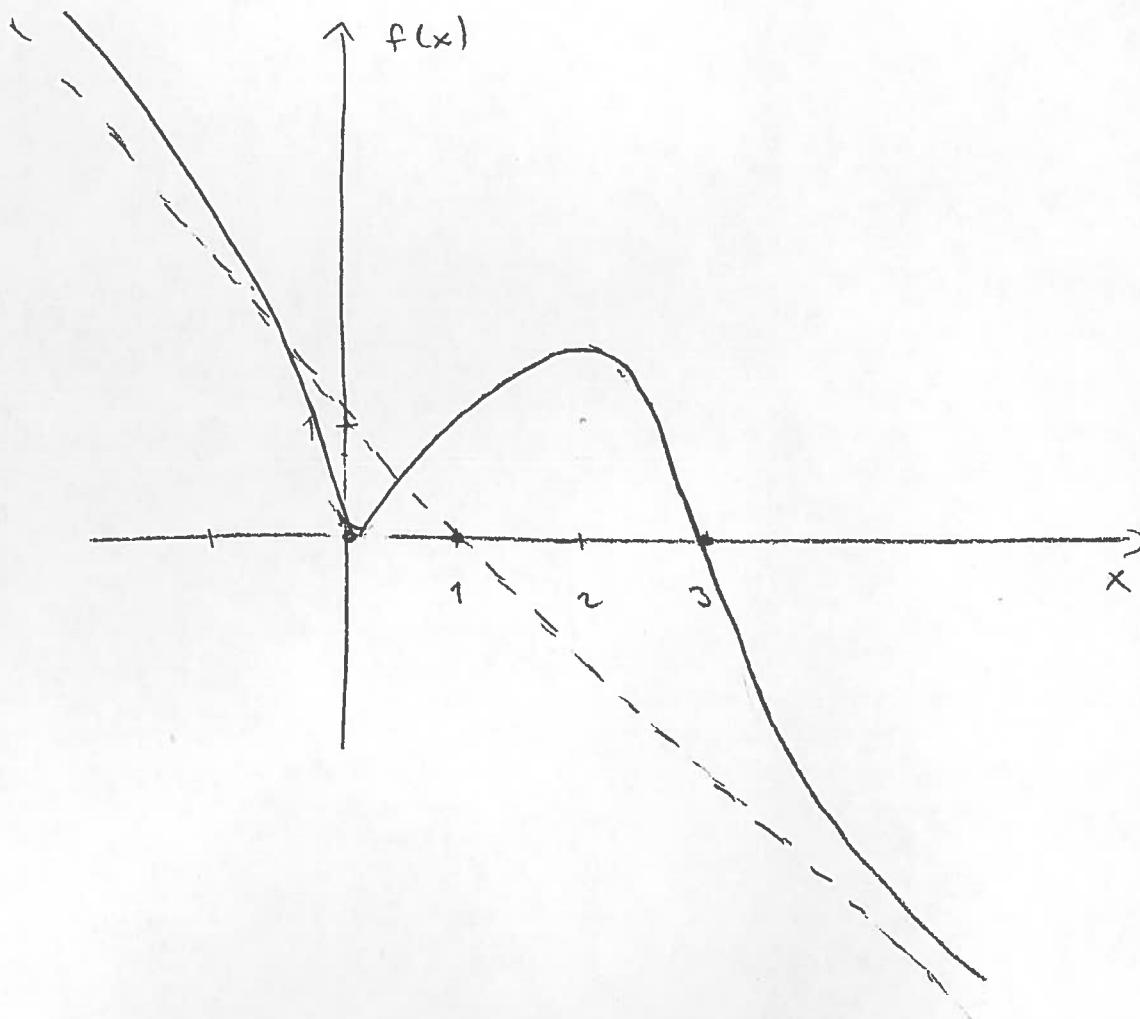
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-1)x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - x^3)^{1/2} + x \dots \text{tilsvarende regning}$$

som når  $x \rightarrow \infty$ .

$$\text{gjør } y = -x + 1$$

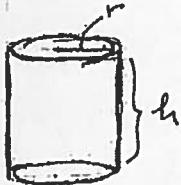
som skråasymptote  
og da når  $x \rightarrow -\infty$ .

skisse av grafen:



LØSNINGMA1101, ØVING 6, H 2014.7.1 Oppg. 2, s. 311

Vi skal bestemme minimum kostnad når de sylinderiske boksene skal romme  $1 \text{ dm}^3$  og materialet i sidene er dobbelt så dyrt som materialet i topp- og bunnsflate. For en kubisk skyld antar vi at prisen er  $1 \text{ kr}/\text{dm}^2$  for topp og bunne og  $2 \text{ kr}/\text{dm}^2$  for sideflaten. Den totale kostnaden for en boks blir da:



$$K = 1 \cdot 2 \cdot \pi r^2 + 2 \cdot 2\pi r \cdot h = 2\pi r[r + 2h]$$

Siden volumet skal være  $1 \text{ dm}^3$  har vi dessuten:  $V = \pi r^2 \cdot h = 1$

Altså  $h = 1/\pi r^2$ . Dette gir:

$$K(r) = 2\pi r[r + \frac{2}{\pi r^2}] = 2\pi[r^2 + \frac{2}{\pi r}]$$

$$K'(r) = 2\pi[2r - \frac{2}{\pi r^2}] = 0 \quad \text{må } r^3 = \frac{1}{\pi}$$

eller  $r = 1/\pi^{1/3}$ . Vi kan studere

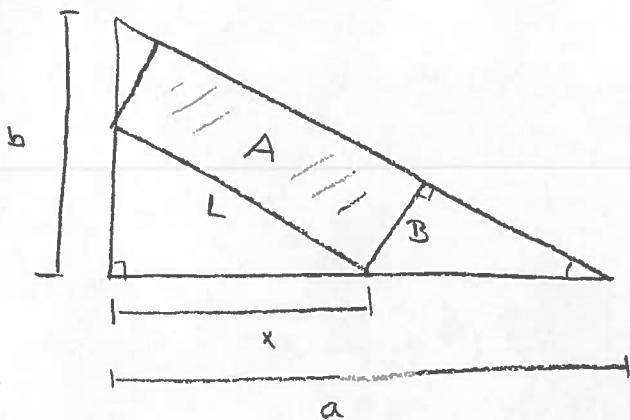
funksjonen  $r \rightarrow K(r)$  på  $(0, \infty)$ . Vi observerer da  $K(r) \rightarrow \infty$  når  $x \rightarrow 0^+$  og når  $x \rightarrow \infty$ .

Altså har funksjonen absolutt minimum når  $x = 1/\pi^{1/3}$  siden dette gir det eneste kritiske punktet i det indre av  $(0, \infty)$ . Altså

$$\min_{0 < r} K(r) = 2\pi \left( \frac{1}{\pi^{2/3}} + 2 \frac{1}{\pi \cdot \pi^{1/3}} \right) = 2\pi \frac{3}{\pi^{2/3}} = 6\pi^{1/3}$$

### 7.1.8

skal finne arealet av det innstrukuret trekantet A som er funksjon av  $x$ , og maksimer arealet.



Arealet er gitt med "lengde ganger bredde" i trekantet, kallt disse L og B, se figur.

Den stor trekant er formlik trekant nedest til venstre i figuren, siden L er parallell med hypotenusen i den stor trekanten.

$$\text{Dermed har vi } \frac{L}{x} = \frac{\text{hypotenus i stor trekant}}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

↑  
Pytagoras

$$L = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \cdot x$$

Den stor trekant er også formlik med trekanten lengst til høyre i figuren, siden de har en felles vinkel og begge i tillegg har en rett vinkel.

$$\text{Dermed har vi } \frac{B}{a-x} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$B = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot (a-x)$$

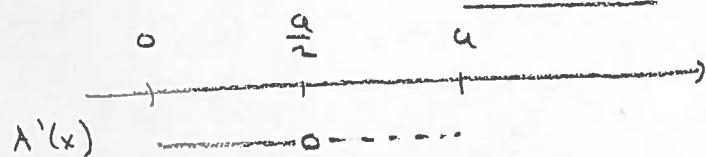
Vi får følgende uttrykk for arealet av rettangled:

$$\begin{aligned} A(x) &= l \cdot B = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \cdot x \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} (a-x) \\ &= \underline{\underline{\frac{b}{a} (ax - x^2)}} \end{aligned}$$

Denne er definert for  $x \in [0, a]$ .

Finner ekstremalpunkt:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{b}{a} (a - 2x) = 0 \\ a - 2x &= 0 \\ 2x &= a \\ x &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$



Ser ut A har maksimalpunkt for  $x = \frac{a}{2}$ , så denne verdien vil gi størst arealet.

$$\begin{aligned} \text{Dette arealet blir } A\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{b}{a} \left(a \frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{4} = \underline{\underline{\frac{a \cdot b}{4}}} \end{aligned}$$