LØSNING:
MA 1101, ØVING 2, H2014

1.3 Oppg. 2, s.46

Hvor mange forskjellige "ord" kan lages av UKULELE?

(Se eks. 1.3.8, s.43)

Her har vi to E-er, to L-er, to U-er og en K

Ut fra 1.3.7 Setning er tallet

$$\frac{7!}{2!\,2!\,2!\,1!} = \frac{1\cdot\cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{4}\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{\cancel{2}\cdot 2\cdot 2} = 3\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = \underline{\underline{630}}$$

Oppg 25, s 49

Vi skal bevise at for alle naturlige tall $n \geq 2$ er:

$$P(n): \sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} = \binom{n+1}{3} \quad \text{Bruker induksjon!}$$

$$P(n+1): \sum_{k=2}^{2}\binom{2}{2} = \binom{2}{2} = 1 \text{ og } \binom{2+1}{3} = \binom{3}{3} = 1 \quad \underline{\text{OK}}!$$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\sum_{k=2}^{n+1}\binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} + \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{3}$$

$$+\binom{n+1}{2} \overset{*}{=} \frac{(n-1)n(n+1)}{2\cdot 3} + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2\cdot 3}\left[(n-1)+3\right] = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

$= \binom{n+2}{3}$. Altså holder $P(2)$ og $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ for $n \geq 2$. Vi er framme!

[* Her benyttes induksjonsantagelsen P_n.]

1.4

Oppgave 3, s 55

(b) $(2x-3y)^4 = 2^4x^4 - 4\cdot 8x^3\cdot 3y + 6\cdot 4x^2\cdot 9y^2 - 4\cdot 2x\cdot 27y^3 + 81y^4$
$= \underline{16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4}$

(c) $(1+\sqrt{2})^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3\sqrt{2} + 6\cdot 1^2\cdot 2 + 4\cdot 1\cdot 2\sqrt{2} + 4$
$= 1 + 4\sqrt{2} + 12 + 8\sqrt{2} + 4 = \underline{17 + 12\sqrt{2}}$

2.1

Oppgave 1, s. 84

(a) $[2,4] \cup [3,6] = [2,6]$

Oppgave 2, s 84

(d) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ siden $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

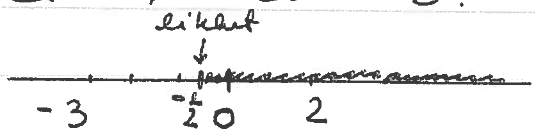
Oppgave 3, s. 84

a) $\{x \mid -2 < x \leq 3\} = (-2, 3]$

Oppgave 5, s. 85

(a) $|x-2| < |x+3| \iff |x-2|^2 < |x+3|^2$
$\iff x^2 - 4x + 4 < x^2 + 6x + 9 \iff$
$-5 < 10x \iff -\frac{1}{2} < x$

Alternativ: $|x-2| < |x+3|$ betyr at avstanden fra x til 2 er mindre enn avstanden fra x til -3.

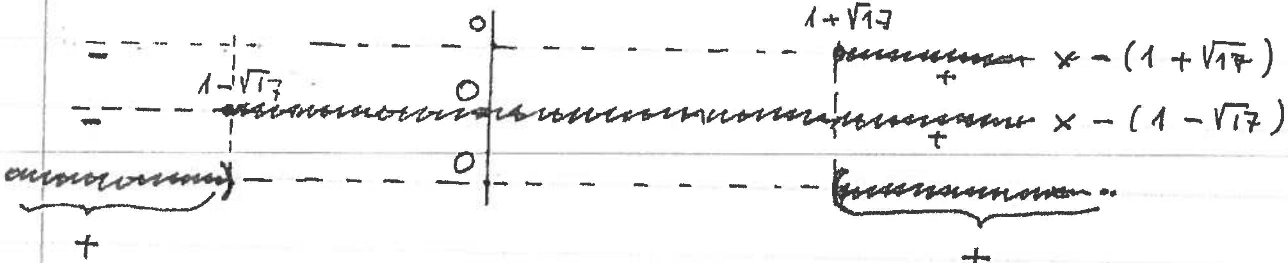


$\underline{x > -\frac{1}{2}}$

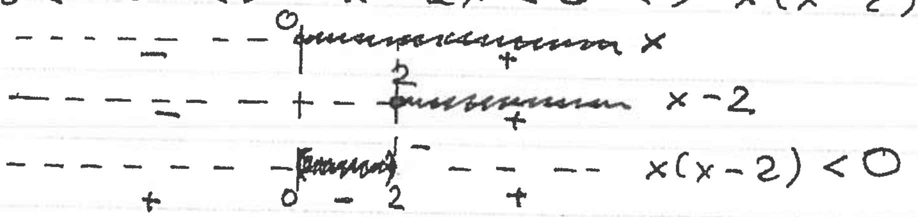
(b) $|x^2-2x-8|>8 \iff (x^2-2x-8>8$ eller $x^2-2x-8<-8)$

(i) $x^2-2x-8>8 \iff x^2-2x-16>0 \iff$

$$\left(x-(1+\sqrt{17})\right)\left(x-(1-\sqrt{17})\right)>0$$



(ii) $x^2-2x-8<-8 \iff x^2-2x<0 \iff x(x-2)<0$



Lösningsmengden:

$\underline{(-\infty,\ 1-\sqrt{17})\cup(0,2)\cup(1+\sqrt{17},\ \infty)}$

2.2 Oppg. 6, s. 91

$x\in\mathbb{Q}$, $y\notin\mathbb{Q}$ antaes og $x\neq 0$, $y\neq 0$.

(i) $x+y\notin\mathbb{Q}$ Anta $z=x+y\in\mathbb{Q}$. Da vil $y = z-x\in\mathbb{Q}$ ut fra teoremet i strid med antagelsen at $y\notin\mathbb{Q}$.

(ii) $x-y\notin\mathbb{Q}$. Anta $w=x-y\in\mathbb{Q}$. Da vil $y=x-w\in\mathbb{Q}$ ut fra teoremet i strid med antag.

(iv) antar $c=x\cdot y\in\mathbb{Q}$. Da er $y=\frac{c}{x}\in\mathbb{Q}$, i strid med antag.