LØSNING:

MA 1101, ØVING 3, H2015

4.3 Oppg. 1a, s. 195

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^4+2n}{3n^4-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{8+\frac{2}{n^3}}{3-\frac{7}{n^4}} = \underline{\frac{8}{3}} \quad \begin{pmatrix}\text{Ref.}\\ 4.3.3.\\ \text{(iv)}\end{pmatrix}$$

Oppg. 3a, s. 196

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\cdot(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 2\cdot 0 = \underline{0}$$

Oppg. 4b, s. 196

Vi skal bevise at

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin n}{n} = 0$$

ut fra def 4.3.1. $\varepsilon > 0$.

Vi minner om at $|\sin x| \le 1$ for alle x.

Vi velger så $N > \frac{2}{\varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}$.

(Minner om Arkimedes' prinsipp, s. 88).

Vi har da:

$$\left|\frac{2\sin n}{n}\right| \le \frac{2}{n} < \varepsilon \qquad \text{når } n \ge N$$

siden $2/n \le 2/N < \varepsilon$. Altså:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin n}{n} = 0}$$

Oppg. 17, s. 197

$\{a_n\}$ er gitt ved: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}+1$

Vi må først vise at følgen $\{a_n\}$ konvergerer.

(ØVING 3, H2015)

Vi skal bevise ved induksjon at

$$a_n \in [1,2]$$

for alle $n \geq 1$. Vi har:

$$a_1 = \frac{a_0}{2} + 1 = 1$$

Vi antar så at $a_k \in [1,2]$ for $k \in \mathbb{N}$.
Vi har da videre:

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + 1 \in [1,2]$$

siden $a_{k+1} \geq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \geq 1$ og

$a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + 1 \leq 2$ siden $a_k \leq 2$.

Altså vil $a_n \in [1,2]$ for alle $n \geq 1$.

Dernest skal vi bevise at $a_n \leq a_{n+1}$ for alle $n \geq 1$. Vi har:

$$a_2 = \frac{a_1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} > a_1 = 1$$

Anta at $a_k \overset{*}{\leq} a_{k+1}$. For å fullføre induksjonen må vi da bevise at

$$a_{k+2} \geq a_{k+1}$$

Vi har:

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1}}{2} + 1 \overset{\text{INDUKSJONSANT. } *}{\geq} \frac{a_k}{2} + 1 = a_{k+1}$$

Altså er følgen $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ monotont voksende med øvre skranke 2. og nedre skranke 1. Ut fra 4.3.9 Teorem vil da følgen konvergere: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in [1,2]$

Siden $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a$, har vi: $a =$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n-1}}{2} + 1\right) = \frac{a}{2} + 1.$$

$a = \frac{a}{2} + 1$ gir $\frac{a}{2} = 1$, d.v.s $\underline{\lim_{n\to\infty} a_n = a = 2}$.