MA1101, ØVING 1, LØSNING

Veiledning Uke 35, 25/8 – 29/8 2014

1.1 **Oppg. 2, s. 32**

Vi skal bevise at

$$11 \cdot 17 \cdot 19 \neq 81 \cdot 43$$

uten å regne ut de to sidene.
$11 \cdot 17 \cdot 19$ er faktorisert i primtall.
Vi observerer at 43 også er et primtall siden det åpenbart ikke er delbart med 2, 3, 5. (Flere primfaktorer kan utelukkes siden $7^2 = 49 > 43$, m.a.o. $7 > \sqrt{43}$. TENK OVER DETTE!)
Høyreside har dermed primtallsfaktoriseringen:

$$3^4 \cdot 43.$$

Ut 1.1.1 ARITMETIKKENS FUNDAMENTALTEOREM følger det dermed at $11 \cdot 17 \cdot 19 \neq 81 \cdot 43$

Oppg. 6, s. 32

(a) $$\sum_{k=0}^{8}(2k+3) = 3+5+7+9+11+13+15+17+19 = \underline{\sum_{m=1}^{9}(2m+1)}$$

(b) $$\sum_{m=-2}^{4}(m+2)3^m = 0\cdot 3^{-2} + 1\cdot 3^{-1} + 2\cdot 3^0 + 3\cdot 3^1 + 4\cdot 3^2 + 5\cdot 3^3 + 6\cdot 3^4$$
$$= \underline{\sum_{k=0}^{6} k\, 3^{k-2}}$$

(c) $$\sum_{m=0}^{10} x^m y^{1-m} = x^0y^1 + x^1y^0 + x^2y^{-1} + x^3y^{-2} + \cdots + x^9y^{-8} + x^{10}y^{-9}$$
$$= \underline{\sum_{m=1}^{11} x^{m-1}y^{2-m}}$$

(Øving 1, H2014)

1.2 Oppg 1, s. 38

Viser ved induksjon at:

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

P_n er her $(*)$.

P_1 holder: $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$.

Antar at P_k holder:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2} k(k+1)$$

Vi har da:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \overset{(P_k \text{ benyttes})}{=} \frac{1}{2} k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2} k(k+1) + \frac{1}{2} \cdot 2(k+1)$$

$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$. Altså holder P_{k+1}, og P_n er sann.

Oppg. 14, s. 39

Vi oppfatter oppskriften s.a. det blir en ny sirkel for hver rekke.

(a) Etter det i-te laget ovenfra legges det til $i+1$ nye sirkler. Totalt har vi da:

$1+2+3+\cdots+n$ sirkler i det n-te laget

Fra oppg. 1, s. 38 vet vi: $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2} n(n+1)$

(b) Skal vise at det totale antall bokser i de n øverste lagene er

$$\frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

Vi fører induksjonsbevis for dette med

$$P_n: \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

P_1 er opplagt riktig. Vi har videre:

$$P_k \Rightarrow P_{k+1}: \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i(i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{i(i+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\overset{P_k \text{ sann}}{=} \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

Altså holder P_n for alle n.

(Øving 1, H2014)

1.5 Oppg. 1, s. 63

(a) Vi skal utføre polynom-divisjon $P(x) : Q(x)$ når

$$P(x) = 3x^3+2x^2+5x-4 \quad ; \quad Q(x) = x-3.$$

$$(3x^3+2x^2+5x-4):(x-3) = 3x^2+11x+38$$
$$-(3x^3-9x^2)$$
$$11x^2+5x-4$$
$$-(11x^2-33x)$$
$$38x-4$$
$$-(38x-114)$$
$$110$$

KONTROLL:

$$\left(3x^2+11x+38+\frac{110}{x-3}\right)(x-3)$$
$$= 3x^3+11x^2+38x$$
$$-9x^2-33x-114+110$$
$$= \underline{3x^2+2x^2+5x-4}$$

som stemmer!

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv 3x^2+11x+38+\frac{110}{x-3}$$

(b) $P(x) = x^4-3x^3+2x^2+3x-2 \quad ; \quad Q(x) = x^2+2x-1$

$$(x^4-3x^3+2x^2+3x-2):(x^2+2x-1) = x^2-5x+13$$
$$-(x^4+2x^3-x^2)$$
$$-5x^3+3x^2+3x-2$$
$$-(-5x^3-10x^2+5x)$$
$$13x^2-2x-2$$
$$-(13x^2+26x-13)$$
$$-28x+11$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv x^2-5x+13+\frac{-28x+11}{x^2+2x-1}$$

KONTROLL:

$$\left(x^2-5x+13+\frac{-28x+11}{2x^2-2x-1}\right)(x^2+2x-1)$$
$$=(x^4-5x^3+13x^2$$
$$+2x^3-10x^2+26x$$
$$-x^2+5x-13)$$
$$-28x+11$$
$$\underline{x^4-3x^2+2x^2+3x-2}$$

Stemmer!

Oppg. 3, s. 63

Vi skal vise at $x=1$ er rot i ligningen:

$$x^3+4x^2+x-6=0$$

$x=1$ gir:

$$1^3+4\cdot 1^2+1-6 = 1+4+1-6 = 0$$

(Øving 1, H2014)

Vi skal finne (mulige) andre røtter.

$$(x^3+4x^2+x-6):(x-1) = x^2+5x+6$$
$$\underline{-(x^3-x^2)}$$
$$5x^2+x-6$$
$$\underline{-(5x^2-5x)}$$
$$6x-6$$
$$\underline{6x-6}$$
$$0$$

Altså har vi:

$$x^3+4x^2+x-6 \equiv (x-1)\cdot(x^2+5x+6)$$

Vi må bestemme røttene i:

$$x^2+5x+6=0$$

Formelen gir:

$$x = \frac{1}{2}\left[-5 \pm \sqrt{25-4\cdot1\cdot6}\,\right] = \frac{1}{2}[-5\pm1] = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

Røtten til ligningen:

$$x^3+4x^2+x-6=0$$

er derfor: $\underline{x_1 = 1, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -2.}$