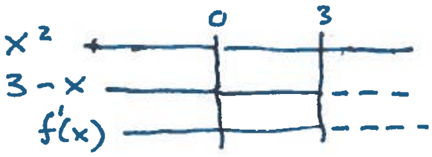
Vanlige forbehold! Kari H.

LØSNINGSFORSLAG MA1101 mai 2011

Oppgave 1 $f(x) = x^3 e^{-x} + 2$ er gitt; deriverbar på $\mathbb{R}$.

a) $f'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x}$

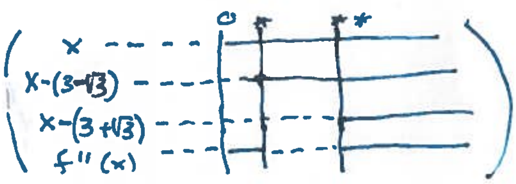
Fortegnsskjema



f er voksende på $(-\infty, 3]$ og avtagende på $[3, \infty)$.
Altså må f ha et maksimum for $x = 3$.
Maksimumspunkt: $\underline{(3,\ 27e^{-3}+2)}$
$\approx (3,\ 1.4+2) = (3,\ 3.4)$

b) $f'(x) = e^{-x}(3x^2 - x^3)$
$f''(x) = -e^{-x}(3x^2-x^3) + e^{-x}(6x-3x^2) = e^{-x}(x^2-6x+6)x$

$f''(x) = 0$ når $x = 0$ eller $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-24}}{2} = \underline{3 \pm \sqrt{3}}$



f har vendepunkt for $x = 0$, $x = 3 \pm \sqrt{3}$ da f'' skifter tegn.

Vendepunkter altså: $\underline{(0, 2),\ (3 \pm \sqrt{3},\ f(3 \pm \sqrt{3}))}$.

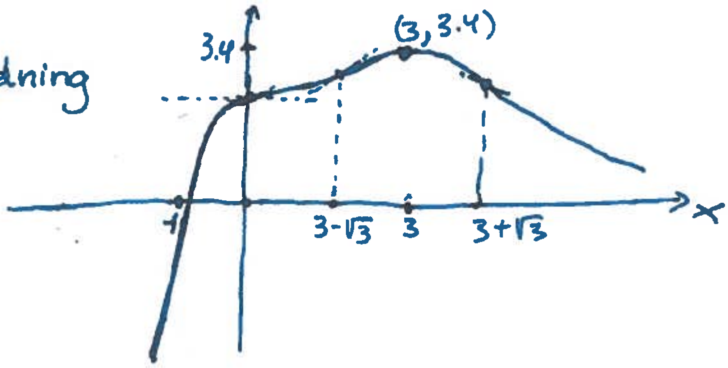
Da f er glatt på hele $\mathbb{R}$, har ikke f noen vertikal asymptote. – Da

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 e^{-x} + 2) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} (x^3 e^{-x} + 2) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{e^x} + 2\right) = 0 + 2 = \underline{2}$

har f en horisontal asymptote $\underline{y = 2}$

c)
Da f er voksende på $(-\infty, 3]$ kan f høyst ha ett nullpunkt her. Da $f(-1) = -e + 2 < 0$ og $f(0) = 2$, har f minst ett nullpunkt her (Skjæringssetningen).
Da f avtar mot 2 på $[3, \infty)$ har f ikke noe nullpunkt på $[3, \infty)$. Konklusjon: f har ett nullpunkt.

Skisseantydning



Oppgave 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{3x} = 1 \cdot \lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{3x} = \underline{\pm\infty}$$

Grensen eksisterer ikke.

Den neste formen er av type 1^∞ (Se Ex 7 s. 231). Vi lar derfor $y = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x+1}$ og tar Logaritmen på begge sider:

$$\underline{\lim_{x\to\infty} \ln y} = \lim_{x\to\infty} (2x+1) \ln x/x-1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x/x-1)}{(2x+1)^{-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}}{-(2x-1)^{-2} \cdot 2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^2}{x(x-1)} = \underline{2}$$

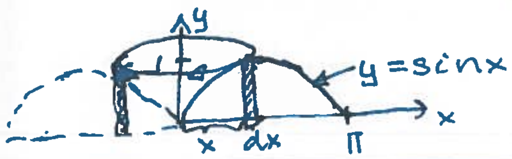
Altså $\lim_{x\to\infty} y = \underline{\underline{e^2}}$

Merk Alternativt har vi

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x+1} = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{(x-1)\frac{2x-1}{x-1}}$$

$\to \underline{e^2}$ når $x \to \infty$.

Oppgave 3



$$V = \int_0^\pi 2\pi x \sin x \, dx \quad \text{(Sylinderskall)}$$

$$= 2\pi \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^\pi = \underline{\underline{2\pi^2}}$$

Oppgave 4

$$x^3 + x^2 - 5x - 15 : x^2 - 9 = x + 1 + \frac{4x-6}{x^2-9}$$

$$\frac{4x-6}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \quad \text{der } A = 1, \; B = 3$$

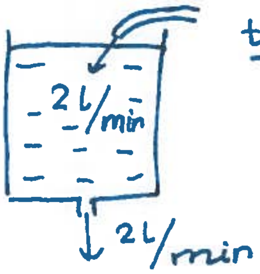
slik at integralet blir $\underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-3| + \ln|x+3|^3 + C}}$

Oppgave 5

$e^{-x} \frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ slik at $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x dx$ dvs. $\text{Arctan}\, y = e^x + C$

$\underline{\underline{y = \tan(e^x + C)}}$

Oppgave 6



$t=3$: 1.5 kg salt i tanken,

$t>3$: I tanken da:

Økning salt/min = salt inn/min − salt ut/min

$$\frac{dy}{dt} = 0.5 - \frac{y(t)\cdot 2}{206}$$

$$\supset: \quad \frac{dy}{dt} = 0.5 - \frac{y(t)}{103}$$

eller $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{103} = 0.5$ LINEÆR

Altså vil

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t/103}\cdot y\right) = 0.5\, e^{t/103} \Rightarrow \underline{y = 51.5 + Ce^{-t/103}}$$

Med startverdien $y(3) = 1.5$ får vi da

$-50 = Ce^{-3/103}$ eller $\underline{C = -50\, e^{3/103}}$

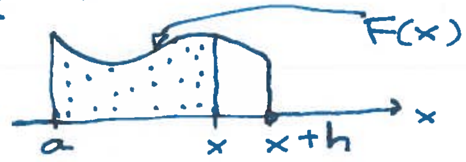
Salt i tanken når $t = 25$ (min): $51.5 - 50e^{-22/103} \approx \underline{\underline{11.1\,(\text{kg})}}$

Når $t \to \infty$ vil $y(t) \to \underline{51.5\,(\text{kg})}$. STEMMER! $0.25 \cdot 203$

Oppgave 7

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad \text{der } F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ f \text{ kont.}$$

La $\underline{h>0}$ ($h<0$ behandles tilsvarende)



$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t) - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

$$\underset{\substack{\text{MVS}\\ \text{Integral}}}{=} \frac{f(c)\,h}{h} = f(c) \text{ der } c \in \,]x, x+h[$$

Altså er $\boxed{F'(x) = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x)}$ da f er kontinuerlig.