Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I. LØSNINGSFORSLAG

Faglig kontakt under eksamen: John Erik Fornæss

Tlf: 46419414

Eksamensdato: KONTE VÅR 2015

Eksamenstid (fra–til): a-b

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemte, enkle kalkulatorer tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 6

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Gitt funksjonen $f(x) = \ln x - x^2 + x + 5, x > 0$.

a) Finn alle ekstremalpunktene til f og avgjør hvor f er voksende og hvor f er avtagende.

b) Hvor mange nullpunkter har f? (Husk å begrunne.)

LF oppgave 1

a) $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1-2x^2+x}{x}$ Vi ser at $f' = 0$ når $x = 1$ og $x = -1/2$ men $x = -1/2$ er ikke i definisjonsområdet for f. Så$f' > 0$ når $0 < x < 1$ og f vokser der. I tillegg er $f' < 0$ når $x > 1$ så f avtar der. Dette gir ekstremalpunkt for $x = 1$ og da er $y = 5$, så $(x, y) = (1, 5)$.

b) Vi ser at f går mot $-\infty$ både når $x \to 0$ og når $x \to \infty$. Derfor gir skjæringssatsen at f har et nullpunkt i $(0, 1)$ og et nullpunkt i $(1, \infty)$. Monotonisitet gir at det blir eksakt to nullpunkter.

Oppgave 2 La $g(x) = \tan x - x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Vis at g har en invers function g^{-1} og finn $(g^{-1})'(1 - \frac{\pi}{4})$.

LF oppgave 2

$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$. Derfor er g $1-1$ og har en invers g^{-1}. Vi ser at $g(\pi/4) = 1 - \pi/4$. Derfor er $(g^{-1})'(1 - \pi/4) = \frac{1}{g'(\pi/4)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \pi/4} - 1} = \frac{1}{2-1} = 1$

Oppgave 3 Området under grafen til $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ og over x aksen, $1 \leq x < \infty$ bli rotert om x aksen. Finn volumet at omdreiningslegemet.

LF oppgave 3

$$\begin{aligned} V &= \int_1^\infty \pi \frac{1}{x^2+1} \\ &= \pi \arctan x|_1^\infty \\ &= \pi(\pi/2 - \pi/4) \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

Oppgave 4 En båt går vinkelrett ut fra en rettlinjet brygge. En gutt står på brygga 100 meter unna startpunktet til båten. I det båten er 50 meter fra brygga observerer han at avstanden mellom han og båten øker med 2 meter per sekund. Hva er båtens hastighet i dette tidspunktet?

LF oppgave 4

La $a(t)$ være avstanden fra gutten til båten og la $y(t)$ være avstanden fra båten til brygga. Da er $a^2(t) = 10000 + y^2(t)$. Vi deriverer:

$2a(t)a'(t) = 2y(t)y'(t)$. I det gitte tidspunktet er $a(t) = \sqrt{100^2 + 50^2} = 50\sqrt{5}$. Vi får

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{2aa'}{2y} \\ &= \frac{aa'}{y} \\ &= \frac{50\sqrt{5} * 2}{50} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Oppgave 5 Løs det ubestemte integralet

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

Hint: Regn ut $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+1}$.

LF oppgave 5

Utregning gir $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+1} = 2\frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

Derfor,

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\arctan x + C\end{aligned}$$

Oppgave 6 Løs differensialligningen

$$xy' - 2y = x^3, y(2) = 1.$$

LF oppgave 6

$$\begin{aligned} y' - \frac{2}{x}y &= x^2 \\ F &= -2\ln|x| \\ y &= e^{-F}\left(\int e^F x^2 dx + C\right) \\ &= x^2\left(\int dx + C\right) \\ &= x^3 + Cx^2\end{aligned}$$

Setter vi inn $y(2) = 1$ så får vi $1 = 8 + 4C$, så $C = -\frac{7}{4}$.

$$y = x^3 - \frac{7x^2}{4}.$$

Oppgave 7 Finn følgen x_n som oppfyller differensligningen og begynnelsesbetingelsene

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 1, x_0 = 1, x_1 = 2$$

LF oppgave 7

Vi finner først en partikulær løsning, $y_p = C$

$$C - 7C + 12C = 1, 6C = 1, C = \frac{1}{6}.$$

Karakteristisk ligning er $r^2 - 7r + 12 = (r-3)(r-4) = 0$ Så vi får generell løsning:
$x_n = A3^n + B4^n +$
$frac16.$

Vi får

$$\begin{aligned}
x_0 &= A + B + \frac{1}{6} \\
&= 1 \\
x_1 &= 3A + 4B + \frac{1}{6} \\
&= 2 \\
A &= \frac{3}{2} \\
B &= -\frac{2}{3} \\
y &= \frac{3}{2}3^n - \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Oppgave 8 La $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^3}, & x \neq 0 \\ -\frac{1}{6}, & = 0 \end{cases}$

a) Er h kontinuerlig? b) Finn også om mulig $h'(0)$.

LF oppgave 8

a)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} &= [\frac{0}{0}] \\
&=_{L'H} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} \\
&= [\frac{0}{0}] \\
&=_{L'H} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} \\
&= [\frac{0}{0}] \\
&=_{L'H} \frac{-1}{6} \\
&= h(0)
\end{aligned}
$$

h er kontinuerlig.

b)

$$
\begin{aligned}
h'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x - x}{x^3} + \frac{1}{6}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^4} \\
&= [\frac{0}{0}] \\
&=_{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{4x^3} \\
&= [\frac{0}{0}] \\
&=_{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{12x^2} \\
&= [\frac{0}{0}] \\
&=_{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{24x} \\
&= [\frac{0}{0}] \\
&=_{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{24} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Formelark for MA1101/MA6101

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$
$\ln(x^a) = a\ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Annenordens differensligning

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$
$$(r^2 + br + c = 0)$$

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis én reell rot } r \neq 0 \\ Cr^n + \overline{C}\overline{r}^n & \text{hvis to komplekse røtter } r, \overline{r} \end{cases}$$