NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I. LØSNINGSFORSLAG

Faglig kontakt under eksamen: John Erik Fornæss /Kari Hag

Tlf: 46419414/48301988

Eksamensdato: 8. desember 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemte, enkle kalkulatorer tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 7

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Alle oppgaver teller likt. For en oppgave med flere deler, teller alle deler like mye.

Oppgave 1 Vis at funksjonen

$$f(x) = \frac{3}{5} - \sin x$$

har nøyaktig ett nullpunkt i intervallet $[0, \pi/2]$.

Løsning Oppgave 1

Vi finner at $f(0) = \frac{3}{5} > 0$ og at $f(\pi/2) = \frac{3}{5} - 1 < 0$. Da følger av skjæringssatsen at f har minst et nullpunkt. Siden $f'(x) = -\cos x < 0$ når $0 < x < \pi/2$ så er det ingen flere nullpunkter.

Oppgave 2

Finn grensen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}$$

Løsning Oppgave 2

Dette er et 0/0 uttrykk så vi bruker L'Hopital. Vi trenger å gjøre det to ganger:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos(2x)}{2} = -2$$

Oppgave 3

i) Beregn integralet

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx$$

ii) Beregn integralet:

$$\int_0^1 \frac{e^{arctanx}}{x^2+1} dx.$$

Løsning Oppgave 3

i)

Vi bruker delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(x+1)dx &= \int_0^1 1 \cdot \ln(x+1)dx \\
&= (x+1)\ln(x+1)I_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx \\
&= 2\ln 2 - 1
\end{aligned}$$

ii)

Vi bruker substitusjon.

$$\begin{aligned}
u &= arctanx \\
du &= \frac{1}{1+x^2}dx \\
\int_0^1 \frac{e^{arctanx}}{x^2+1}dx &= \int e^u du \\
&= e^u \\
&= e^{\arctan x} I_0^1 \\
&= e^{\arctan 1} - e^{\arctan 0} \\
&= e^{\pi/4} - 1
\end{aligned}$$

Oppgave 4

i) Løs differensialligningen

$$\begin{aligned}
y' + \frac{y}{x} &= x, \\
y(1) &= 0.
\end{aligned}$$

ii) Løs differensialligningen

$$y'(1+x^2) - y^3 = 0$$

Løsning Oppgave 4
i)

$$\begin{aligned}
F(x) &= \ln x \\
y &= e^{-F}\left(\int e^F x\,dx + C\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\int x^2 dx + C\right) \\
&= \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x} \\
0 &= \frac{1}{3} + C \\
y &= \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3x}
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
y'(1+x^2) - y^3 &= 0 \\
\frac{y'}{y^3} &= \frac{1}{1+x^2} \\
-\frac{1}{2y^2} &= \arctan x + C \\
-2y^2 &= \frac{1}{\arctan x + C} \\
y^2 &= \frac{1}{C' - 2\arctan x} \\
y &= \pm\sqrt{\frac{1}{C' - 2\arctan x}}
\end{aligned}$$

Oppgave 5 Finn absolutt maksimum og absolutt minimum av funksjonen $y = f(x) = x^3 - 2x = (x^2-2)x$ på intervallet $[-2, 2]$.

Løsning Oppgave 5

$f'(x) = 3x^2 - 2$. $f'(x) = 0$ når $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
Vi sjekker verdier:

$$\begin{aligned}
f(-2) &= -4 \\
f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) &= (\frac{2}{3} - 2)(-\sqrt{\frac{2}{3}}) \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{4}{3}) \\
f(\sqrt{\frac{2}{3}}) &= (\frac{2}{3} - 2)(\sqrt{\frac{2}{3}}) \\
&= -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{3} \\
f(2) &= 4
\end{aligned}$$

Vi ser at absolutt maksimum er i punktet $(2, 4)$ og absolutt minimum er i punktet $(-2, -4)$.

Oppgave 6 Finn eventuelle asymptoter til funksjonen

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

Løsning av oppgave 6
Det er en vertikal asymptote i $x = 0$. Det er også en skråasymptote $y = mx + b$.
Vi bestemmer først m.

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Grensen kan for exsempel finnes ved hjelp av L'Hopital. Vi finner b

$$
\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x} - x \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Linja $y = x$ er skråasymptote når $x \to \pm\infty$.

Oppgave 7 Vis at funksjonen $f(x) = 2x + \sin x, x \in (-\infty, \infty)$ har en invers funksjon $g(x)$ og beregn $g'(2\pi)$.

Løsning Oppgave 7

$f'(x) = 2 + \cos x > 0$. Siden f is strengt voksende har den en invers $g(x)$. Vi vet at $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$. Vi setter her $x = \pi$. Vi får $f(\pi) = 2\pi$. Derfor er $g'(2\pi) = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{2+\cos\pi} = 1$.

Oppgave 8 Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{2}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

i) Vis at f er deriverbar i $x = 0$.
ii) Vis at

$$\lim_{x\to 0} f'(x)$$

ikke eksisterer.

Løsning av oppgave 8

i) Vi beregner

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(2/x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} x\sin(2/x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Her har vi brukt skvisteoremet fordi $-|x| \leq x\sin(2/x) \leq |x|$ og at $|x| \to 0$.

ii)

Vi beregner $f'(x) = 2x\sin(2/x) - 2x^2\cos(2/x)/x^2 = 2x\sin(2/x) - 2\cos(2/x)$. Den første delen konvergerer mot null pga. skvisteoremet. Den andre delen konvergerer ikke. Den oscillerer mellom ± 2.

Oppgave 9 Anta at $x > -1$. Bruk middelverdisetningen (sekantsetningen) til å vise at

$$\ln(1+x) \leq x.$$

Løsning oppgave 9

La $f(x) = \ln(1+x) - x$. Da ser vi at $f(0) = 0$. Vi har også at $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$. Hvis $x > 0$, så er $f'(x) < 0$. Hvis $x > 0$ så følger at $f(x) = f(x) - f(0) = f'(c)(x-0)$ for en $0 < c < x$. Det følger at $f(x) < 0$ når $x > 0$. Hvis $x < 0$, $x > -1$ har vi at

$f'(x) > 0$. Derfor vil vi ha for $x < 0$ at $-f(x) = f(0) - f(x) = f'(c)(0 - x)$ for en $c < 0$. Det følger at $f(x) < 0$ også for $x < 0$.

Oppgave 10 Et rektangel har en konstant omkrets på 10 cm. Vi øker lengden med 1 cm i sekundet. Hvor fort øker/minker arealet når bredden er 2 cm?

Løsning Oppgave 10

Vi gir to mulige løsninger:

Løsning 1:
La lengden være $l(t)$ og bredden være $b(t)$. Vi har at $2l(t)+2b(t) = 10$. Når $b(t) = 2$, så er $l(t) = 3$. Ved derivering får vi $2l'(t) + 2b'(t) = 0$. Siden $l'(t) = 1$, så følger at $b'(t) = -1$. Arealet er $A(t) = l(t)b(t)$. Derfor er $A'(t) = l'(t)b(t) + l(t)b'(t) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -1cm^2/s$.

Løsning 2:
La lengden være $l(t)$ og bredden være $b(t)$. Vi har at $2l(t) + 2b(t) = 10$ så $b(t) = 5 - l(t)$. Arealet $A(t) = l(t) \cdot b(t) = l(t)(5 - l(t)) = 5l(t) - l^2(t)$. Derfor er $A'(t) = 5l'(t) - 2l(t)l'(t)$. Vi sjekker tidspunktet når $b(t) = 2$, så $l(t) = 3$. Da er $A'(t) = 5(1) - 2 \cdot 3 \cdot 1 = -1cm^2/s$.

FORMELARK FOR MA1101/MA6101

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
$\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$