NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I**

Faglig kontakt under eksamen: John Erik Fornæss /Kari Hag

Tlf: 46419414/48301988

Eksamensdato: 8. desember 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemte, enkle kalkulatorer tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Alle oppgaver teller likt. For en oppgave med flere deler, teller alle deler like mye.

Oppgave 1 Vis at funksjonen

$$f(x) = \frac{3}{5} - \sin x$$

har nøyaktig ett nullpunkt i intervallet $[0, \pi/2]$.

Oppgave 2

Finn grensen

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}$$

Oppgave 3

i) Beregn integralet

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx$$

ii) Beregn integralet:

$$\int_0^1 \frac{e^{arctanx}}{x^2+1}dx.$$

Oppgave 4

i) Løs differensialligningen

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x} &= x, \\ y(1) &= 0. \end{aligned}$$

ii) Løs differensialligningen

$$y'(1+x^2) - y^3 = 0$$

Oppgave 5 Finn absolutt maksimum og absolutt minimum av funksjonen $y = f(x) = x^3 - 2x$ på intervallet $[-2, 2]$.

Oppgave 6 Finn eventuelle asymptoter til funksjonen

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

Oppgave 7 Vis at funksjonen $f(x) = 2x + \sin x, x \in (-\infty, \infty)$ har en invers funksjon $g(x)$ og beregn $g'(2\pi)$.

Oppgave 8 Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{2}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

i) Vis at f er deriverbar i $x = 0$.
ii) Vis at

$$\lim_{x \to 0} f'(x)$$

ikke eksisterer.

Oppgave 9 Anta at $x > -1$. Bruk middelverdisetningen (sekantsetningen) til å vise at

$$\ln(1 + x) \leq x.$$

Oppgave 10 Et rektangel har en konstant omkrets på 10 cm. Vi øker lengden med 1 cm i sekundet. Hvor fort øker/minker arealet når bredden er 2 cm?

FORMELARK FOR MA1101/MA6101

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
$\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$