

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I**

Faglig kontakt under eksamen: John Erik Fornæss (Trondheim Spektrum)/Kari Hag (Øvri-ge)

Tlf: 46419414/48301988

Eksamensdato: 9. desember 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemte, enkle kalkulatorer tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 1

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato

Sign

Oppgave 1 Gitt funksjonen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$.

a) Finn alle ekstremalpunktene til f og avgjør hvor f er voksende og hvor f er avtagende.

b) Hvor mange nullpunkter har f ? (Husk å begrunne.)

Oppgave 2 La $h(x) = x^3 + 2x + 2$.

Vis at h har en invers funksjon h^{-1} og finn $(h^{-1})'(2)$.

Oppgave 3 Området under grafen til $f(x) = \sqrt{x \sin x}$ og over x akse, $0 \leq x \leq \pi$, blir rotert om x akse. Finn volumet av omdreiningslegemet.

Oppgave 4 Fallskjermhopper Amelia lander vertikalt. En gutt står 300 meter unna landingspunktet. I det fallskjermhopperen er 200 meter over bakken observerer han at avstanden mellom ham og Amelia avtar med 10 meter per sekund. Hva er fallskjermhopperens vertikale hastighet i dette tidspunktet? Du kan anta at bakken er horisontal og at alle målinger foretas ved bakkenivå.

Oppgave 5 La $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0, x > -1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ Finn $f'(0)$ hvis den eksisterer.

Oppgave 6 Løs det ubestemte integralet

$$\int \frac{(x^2 + x^3 + 1)dx}{x^3(x^2 + 1)}$$

Oppgave 7 Løs differensialligningen

$$2y' + \frac{1}{\sqrt{x}}y = e^{-\sqrt{x}}, x > 0.$$

Oppgave 8 Anta at f, f', f'' er kontinuerlige for alle reelle tall x og at $|f''(x)| \leq 2$. Anta også at $f(0) = f'(0) = 1$.

Vis at $|f'(x)| \leq 2|x| + 1$ og at $|f(2)| \leq 7$.

Formelark for MA1101/MA6101

Ekspontialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
 $\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
 $\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Annenordens differensligning

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$
$$(r^2 + br + c = 0)$$

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis to reelle r\otter } r_1 \neq r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis \acute{e}n reell rot } r \neq 0 \\ Cr^n + \bar{C}\bar{r}^n & \text{hvis to komplekse r\otter } r, \bar{r} \end{cases}$$