K A L K U L U S

Løsningsforslag til utvalgte oppgaver fra Tom Lindstrøms lærebok

ved
Klara Hveberg

Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Forord

Dette er en samling løsningsforslag som jeg opprinnelig utarbeidet til gruppeundervisningen i kurset MAT100A ved Universitetet i Oslo høsten 2000. Den vil derfor gjenspeile oppgaveutvalget som ble gitt til gruppene dette semesteret, og seksjoner som ikke var pensum på den tiden vil derfor kunne opptre som mystiske "hull" i denne samlingen. Jeg har for eksempel ikke laget løsningsforslag til oppgaver i seksjonene 1.3 og 1.4 (kombinatorikk og binomialformelen), seksjon 4.2 (inhomogene differensligninger), seksjon 7.7 (hyperbolske funksjoner), seksjon 10.5 (annenordens inhomogene differensialligninger) og seksjonene fra 11.3 og utover, da disse var fjernet fra pensum den aktuelle høsten. Videre var deler av seksjon 3.4 (om å finne generelle n'te røtter av komplekse tall) og seksjon 9.5 (kriterier for når uegentlige integraler konvergerer) kraftig nedtonet.

Siden løsningsforslagene var ment som et supplement til den ordinære gruppeundervisningen, tar de bare for seg et representativt utvalgt av de oppgavene som ble gitt. Jeg har valgt å prioritere oppgaver som illustrerer hvordan man kan gjennomføre et matematisk resonnement, men har også tatt med løsning på noen enkle "drilloppgaver" innimellom. La meg til slutt minne om at man ikke lærer matematikk ved å se på ferdige løsninger som andre har laget — bare ved å bryne seg på oppgavene selv, oppdager man hvor problemene sitter og kan verdsette løsningen når man ser den. Jeg håper derfor at disse løsningsforslagene blir brukt på en fornuftig måte, og at de kan være til nytte under repetisjon og for studenter som ikke har anledning til å følge den ordinære gruppeundervisningen.

Hvis du finner noen feil eller trykkfeil i løsningsforslagene, er det fint om du gir meg beskjed på epostadressen `klara@math.uio.no`.

Blindern, 28. mars 2001

Klara Hveberg

I denne nye utgaven av løsningsforslagene er oppgavenumrene revidert i henhold til tredje utgave av læreboken.

Blindern, 30. juni 2006

Klara Hveberg

Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 1

I seksjon 1.1 regner jeg med at det ikke er behov for å utdype lærebokas fasit i de innledende oppgavene om bruk av summetegnet, og har derfor bare laget løsningsforslag til noen få oppgaver av denne typen for å illustrere bytte av summasjonsindeks. Oppgave 1.1.11 og 1.1.13 illustrerer bruk av aritmetikkens fundamentalteorem, og gir deg fin trening i å føre et matematisk resonnement. Det samme gjelder induksjonsoppgavene i seksjon 1.2. Her gir oppgave 1.2.4 et enkelt eksempel på bruk av induksjon, mens 1.2.6, 1.2.7 og 1.2.18 erfaringsmessig volder studentene mer hodebry.

Oppgave 1.1.4c

De to summene er like, siden begge består av de samme leddene summert i motsatt rekkefølge. Vi kan også se dette ved å bytte summasjonsindeks. Setter vi $m = 3 - n$ får vi

$$\sum_{n=0}^{4} a^n b^{3-n} = \sum_{m=3}^{-1} a^{3-m} b^m = \sum_{m=-1}^{3} a^{3-m} b^m$$

Oppgave 1.1.6

b) Ved å sette $k = n + 2$ får vi

$$\sum_{n=-2}^{4} (n+2)3^n = \sum_{k=0}^{6} k3^{k-2}$$

c) Ved å sette $m = n + 1$ får vi

$$\sum_{n=0}^{10} x^n y^{1-n} = \sum_{m=1}^{11} x^{m-1} y^{1-(m-1)} = \sum_{n=1}^{11} x^{n-1} y^{2-n}$$

hvor vi i den siste summen har gjeninnført navnet n på summasjonsindeksen — som kan hete hva som helst.

Oppgave 1.1.11

Hvis $a = p_1 p_2 \cdots p_m$ og $b = q_1 q_2 \cdots q_n$ er primfaktoriseringer av a og b, så vil $ab = p_1 p_2 \cdots p_m q_1 q_2 \cdots q_n$ være en primfaktorisering av produktet ab. Siden primfaktorisering er entydig, må ethvert primtall p som går opp i ab være et av primtallene p_i eller q_j i primfaktoriseringen til ab. Så hvis $p = p_i$ vil p gå opp i a, og hvis $p = q_j$ vil p gå opp i b.

Oppgave 1.1.13

La alderen til barna være x, y og z år. Vi vet at $x \cdot y \cdot z = 36$ og at summen av barnas alder er lik husnummeret til huset de bor i. La oss finne alle måter å skrive $36 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ som et produkt av tre tall og samtidig skrive opp summen av disse tre tallene.

$$\begin{array}{ll}
36 = 1 \cdot 1 \cdot 36 & 1 + 1 + 36 = 38 \\
36 = 1 \cdot 2 \cdot 18 & 1 + 2 + 18 = 21 \\
36 = 1 \cdot 3 \cdot 12 & 1 + 3 + 12 = 15 \\
36 = 1 \cdot 4 \cdot 9 & 1 + 4 + 9 = 14 \\
36 = 1 \cdot 6 \cdot 6 & 1 + 6 + 6 = 13 \\
36 = 2 \cdot 2 \cdot 9 & 2 + 2 + 9 = 13 \\
36 = 2 \cdot 3 \cdot 6 & 2 + 3 + 6 = 11 \\
36 = 3 \cdot 3 \cdot 4 & 3 + 3 + 4 = 10
\end{array}$$

Siden venninnen ikke kunne avgjøre alderen på barna selv om hun kjente summen av aldrene deres (dvs husnummeret), må denne summen ha vært 13; alle de andre summene fremkommer på en entydig måte slik at venninnen ville ha visst hva alderen til barna var. Barna må altså være enten 2, 2 og 9 år eller 1, 6 og 6 år. Siden det fantes et eldste barn, så må alderen til barna være 2, 2 og 9 år.

Oppgave 1.2.4

Vi skal vise at formelen

$$(P_n) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

er riktig for alle naturlige tall n.

i) Vi sjekker først tilfellet $n = 1$: P_1 er sann, siden

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

ii) Anta så at P_m er sann for et naturlig tall $m \in N$. Induksjonstrinnet består da i å vise at også P_{m+1} er sann, det vil si at

$$(P_{m+1}) \qquad \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{m+1}{m+2}$$

Vi har

$$\sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

som ifølge induksjonsantagelsen blir

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{m(m+2)+1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m^2+2m+1}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} = \frac{m+1}{m+2}
\end{aligned}
$$

Dermed har vi vist at P_{m+1} blir sann dersom P_m er sann. Ifølge induksjonsprinsippet er da P_n sann for alle $n \in \mathbf{N}$.

Oppgave 1.2.6

Vi skal vise påstanden

(P_n) $\qquad n(n^2+5)$ er delelig med 6 for alle $n \in \mathbf{N}$.

i) Vi sjekker først tilfellet $n = 1$: P_1 er sann siden $1(1^2+5) = 6$, som er delelig med 6.

ii) Anta så at P_m er sann for et naturlig tall $m \in \mathbf{N}$. Induksjonstrinnet består i å vise at da må også P_{m+1} være sann. Vi har

$$
\begin{aligned}
(m+1)[(m+1)^2+5] &= (m+1)(m^2+2m+6) \\
&= (m+1)(m^2+5+2m+1) \\
&= m(m^2+5) + 3m^2 + 3m + 6
\end{aligned}
$$

Ved induksjonsantagelsen er det første leddet $m(m^2+5)$ delelig med 6, og det siste leddet 6 er opplagt også delelig med 6. Det gjenstår derfor bare å vise at $3m^2 + 3m = 3m(m+1)$ er delelig med 6, det vil si at $m(m+1)$ er delelig med 2. Men dette er oppfylt, siden ett av tallene m og $m+1$ må være et partall og altså delelig med 2. Dermed har vi vist at P_{m+1} er sann dersom P_m er sann.

Ved induksjonsprinsippet er da P_n sann for alle $n \in \mathbf{N}$.

Oppgave 1.2.7

Vi skal vise påstanden

(P_n) $\qquad 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ er delelig med 7 for alle $n \in \mathbf{N}$.

i) Vi sjekker først for $n = 1$: P_1 er sann siden

$$2^{1+2} + 3^{2\cdot 1+1} = 2^3 + 3^3 = 35 = 7 \cdot 5$$

som er delelig med 7.

ii) Anta så at P_m er sann for et naturlig tall $m \in \mathbf{N}$. Induksjonstrinnet består i å vise at da må også P_{m+1} være sann, det vil si at

(P_{m+1}) $\qquad 2^{(m+1)+2} + 3^{2(m+1)+1}$ er delelig med 7

Vi har

$$\begin{aligned} 2^{(m+1)+2} + 3^{2(m+1)+1} &= 2^{m+3} + 3^{2m+3} \\ &= 2 \cdot 2^{m+2} + 9 \cdot 3^{2m+1} \\ &= 2 \cdot 2^{m+2} + (2+7) \cdot 3^{2m+1} \\ &= 2 \cdot 2^{m+2} + 2 \cdot 3^{2m+1} + 7 \cdot 3^{2m+1} \\ &= 2 \cdot (2^{m+2} + 3^{2m+1}) + 7 \cdot 3^{2m+1} \end{aligned}$$

Ifølge induksjonsantagelsen er $2^{m+2} + 3^{2m+1}$ delelig med 7, slik at det første leddet i summen ovenfor er delelig med 7. Siden det andre leddet $7 \cdot 3^{2m+1}$ åpenbart også er delelig med 7, følger det at hele summen er delelig med 7, det vil si at P_{m+1} blir sann.

Ifølge induksjonsprinsippet er da P_n sann for alle $n \in \mathbf{N}$.

Oppgave 1.2.18

Vi skal finne feilen i følgende "induksjonsbevis" for påstanden

(P_n) $\qquad$ "I enhver samling av n personer er alle like dumme."

Bevisforsøk:

i) For $n = 1$ har vi bare én person, som opplagt er like dum som seg selv, så P_1 er sann.

ii) Anta så at P_k er sann for en $k \in \mathbf{N}$. Vi må vise at da er også P_{k+1} sann, det vil si: "I enhver samling på $k+1$ personer så er alle like dumme". Vi ser altså på en gruppe med $k+1$ personer. Fjern én av disse personene slik at vi står igjen med en gruppe på k personer som ved induksjonsantagelsen er like dumme. Bytter vi deretter ut én av disse personene med den siste personen, får vi en ny gruppe på k personer som også må være like dumme ifølge induksjonsantagelsen. Men da må alle de $k+1$ personene være like dumme, og beviset er ferdig.

Feil i bevisforsøket: For at påstanden skal gjelde for alle $n \in \mathbf{N}$ må vi i induksjonstrinnet ii) ha et resonnement som holder for et vilkårlig naturlig tall $k \geq 1$. Men resonnementet vi benytter bryter sammen i tilfellet $k = 1$, og fungerer bare for $k \geq 2$. For å se dette, skal vi ta en nærmere titt på oppbygningen av resonnementet: Vi starter altså med en samling på $k+1$ personer som vi ønsker å vise er like dumme. Fjerner vi først én av disse personene, står vi igjen med en delmengde M_1 på k personer som ifølge induksjonsantagelsen er like dumme. Bytter vi så ut én av personene i M_1 med den personen som ble fjernet først, får vi en ny delmengde M_2 på k personer som ifølge induksjonsantagelsen også er like dumme. "Beviset" konkluderer deretter med at alle de $k+1$ personene vi startet med må være like dumme, men for å kunne trekke denne slutningen, baserer vi oss egentlig på at det finnes en person P som er med i begge de to delmengdene M_1 og M_2. Det underliggende resonnementet er nemlig at siden P er like dum som alle personene i M_1 (P er jo selv med i M_1), og dessuten like dum som alle personene i M_2 (P er jo også med i M_2), så er alle personene i M_1 like dumme som alle personene i M_2.

Det siste resonnementet bryter sammen når $k = 1$: I dette tilfellet vil jo mengdene M_1 og M_2 bli to disjunkte samlinger på $k = 1$ personer. Alt induksjonsantagelsen da sier oss, er at hver av de to personene er like dum som seg selv, men siden det ikke finnes noen person som er med både i M_1 og i M_2, kan vi ikke ut fra dette konkludere med at de $k+1 = 2$ personene vi startet med må være like dumme.

Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 2

I seksjon 2.1 får du øvelse i å løse ulikheter hvor tallverdier inngår (oppgave 2.1.5) og enkel trening i å føre matematiske resonnementer ved å kombinere bruk av tallverdi, trekantulikheten og induksjon (oppgave 2.1.9 og 2.1.10). Oppgave 2.1.6 og 2.1.7 er gode eksempler på at du ikke bør la deg avskrekke av at en oppgavetekst begynner med "Vis at..." Du får ytterligere trening i enkel matematisk argumentasjon gjennom oppgavene om rasjonale og irrasjonale tall i seksjon 2.2. Her bør du merke deg strategien ved kontrapositive bevis og bevis ved motsigelse. Oppgavene om supremum og infimum i seksjon 2.3 faller i startfasen erfaringsmessig tyngre for mange studenter, og jeg har derfor laget fasit til alle gruppeoppgavene som ble gitt fra dette kapittelet (oppgave 2.3.6 ble bare gitt som en tilleggsoppgave for de som hadde lyst på en ekstra utfordring).

Oppgave 2.1.5

a) For å løse ulikheten $|x-2| < |x+3|$ benytter vi oss av det faktum at $|a| < |b| \iff a^2 < b^2$. Følgende utsagn blir dermed ekvivalente.

$$\begin{aligned} |x-2| &< |x+3| \\ (x-2)^2 &< (x+3)^2 \\ -4x+4 &< 6x+9 \\ -5 &< 10x \\ x &> -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Ulikheten $|x^2-2x-8| > 8$ er oppfylt hvis og bare hvis vi har enten $x^2-2x-8 > 8$ eller $x^2-2x-8 < -8$.

Den første av disse ulikhetene kan skrives som $(x-1)^2 > 17$, hvilket er ekvivalent med at $|x-1| > \sqrt{17}$, det vil si at $x-1 > \sqrt{17}$ eller $x-1 < -\sqrt{17}$, altså at $x \in (-\infty, 1-\sqrt{17}) \cup (1+\sqrt{17}, \infty)$.

Den andre ulikheten kan skrives $|x-1|^2 < 1$, som er ekvivalent med at $|x-1| < 1$, det vil si at $-1 < x-1 < 1$, altså er $x \in (0,2)$.

I alt har vi dermed at ulikheten $|x^2-2x-8| > 8$ er oppfylt hvis og bare hvis $x \in (-\infty, 1-\sqrt{17}) \cup (0,2) \cup (1+\sqrt{17}, \infty)$.

Oppgave 2.1.6

Per definisjon av absoluttverdi (side 62 i Kalkulus) har vi

$$|x| = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Fra skolematematikken husker vi at kvadratroten til et tall a er det positive tallet som har kvadrat lik a. Men det betyr at

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Av definisjonene følger det dermed at $|x| = \sqrt{x^2}$.

Oppgave 2.1.7

Identiteten $|xy| = |x||y|$ følger av oppgave 2.1.4, idet vi har

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$$

Oppgave 2.1.9

Vi skal vise at for alle tall x, y og z så er

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

Smugler vi inn z i uttrykket og benytter trekantulikheten som sier at $|a + b| \leq |a| + |b|$, får vi:

$$|x - y| = |x - z + z - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$$

som vi skulle vise.

Oppgave 2.1.10

Vi skal vise ved induksjon på n at

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

for alle reelle tall $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Vi betegner utsagnet ovenfor med P_n. Da er P_1 opplagt sann siden

$$|a_1| \leq |a_1|$$

Anta så at P_m er sann, det vil si at

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_m| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|$$

Vi må vise at da er også P_{m+1} sann. Benytter vi trekantulikheten i første skritt og induksjonsantagelsen i andre skritt, får vi

$$\begin{aligned} |(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) + a_{m+1}| &\leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_m| + |a_{m+1}| \\ &\leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m| + |a_{m+1}| \end{aligned}$$

Altså er P_{m+1} sann dersom P_m er sann.

Induksjonsprinsippet sikrer da at formelen gjelder for alle $n \in \mathbf{N}$.

Oppgave 2.2.3

a) Brøken $\frac{7/3}{28/5}$ er rasjonal, siden både telleren og nevneren er rasjonale (setning 2.2.1).

b) I brøken $\frac{2-7\sqrt{2}}{4}$ er telleren irrasjonal (siden den er en differens mellom det rasjonale tallet 2 og det irrasjonale tallet $7\sqrt{2}$ (produktet av et rasjonalt og et irrasjonalt tall er irrasjonalt)), mens nevneren er rasjonal. Ifølge setning 2.2.2 er da brøken selv irrasjonal.

c) Siden differensen mellom to irrasjonale tall noen ganger blir et rasjonalt tall og andre ganger et irrasjonalt tall, må vi omforme uttrykket og se hva vi får.

$$3\sqrt{2} - 6\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\Big) = 3\sqrt{2} - \frac{6}{\sqrt{2}} + 24 = 24$$

Differensen er altså rasjonal.

d) En brøk hvor både telleren og nevneren er irrasjonale, kan noen ganger være rasjonal og andre ganger irrasjonal, så vi må omforme brøken og se hva vi får.

$$\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{(3+\sqrt{2})^2}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{9+6\sqrt{2}+2}{9+2} = \frac{11+6\sqrt{2}}{11}$$

Her er telleren irrasjonal og nevneren rasjonal, så brøken er irrasjonal (setning 2.2.2).

e) Som i punkt d) er både telleren og nevneren irrasjonale, så vi omformer brøken

$$\frac{3+\sqrt{2}}{4(3+\sqrt{2})} = \frac{1}{4}$$

og ser at den er rasjonal.

Oppgave 2.2.5

a) Det er galt at summen av to irrasjonale tall alltid er irrasjonal.
Moteksempel: Summen $\sqrt{2}+(3-\sqrt{2}) = 3$ av de to irrasjonale tallene $\sqrt{2}$ og $(3-\sqrt{2})$ er rasjonal.

b) Det er sant at hvis a er irrasjonal, så er $-a$ det også.
Bevis: Anta at a er irrasjonal. Da er $-a = (-1)a$ som er et produkt mellom et rasjonalt tall og et irrasjonalt tall, og derfor selv et irrasjonalt tall.

c) Det er galt at hvis a^2 er rasjonal, så er a det også.
Moteksempel: $a^2 = 2$ er rasjonal, men $a = \sqrt{2}$ er irrasjonal.

d) Det er sant at hvis a^2 er irrasjonal, så er a det også.
Bevis: Vi viser det kontrapositive utsagnet, nemlig at hvis a er rasjonal, så er a^2 også rasjonal.

Anta altså at a er rasjonal. Da kan vi skrive $a = b/c$ hvor $b, c \in \mathbf{Z}$ og $c \neq 0$. Men da er $a^2 = b^2/c^2$ med $b^2, c^2 \in \mathbf{Z}$ og $c^2 \neq 0$. Men det betyr jo nettopp at a^2 er rasjonal.

e) Det er sant at hvis a er irrasjonal, så er $1/a$ det også.
Bevis: Anta at a er irrasjonal. Da har brøken $1/a$ en rasjonal teller og en irrasjonal nevner, og er da ifølge setning 2.2.2 selv irrasjonal.

Oppgave 2.2.7

Vi skal bevise at $\sqrt{3}$ er irrasjonal. Anta (for motsigelse) at $\sqrt{3}$ er rasjonal, det vil si at vi kan skrive $\sqrt{3} = a/b$ hvor a og b er naturlige tall. La $a = p_1 p_2 \cdots p_m$ og $b = q_1 q_2 \cdots q_n$ være primfaktoriseringene til a og b. Da har vi

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_m}{q_1 q_2 \cdots q_n}$$

Kvadrerer vi begge sider av ligningen, får vi

$$3 = \frac{p_1^2 p_2^2 \cdots p_m^2}{q_1^2 q_2^2 \cdots q_n^2}$$

det vil si

$$3 q_1^2 q_2^2 \cdots q_n^2 = p_1^2 p_2^2 \cdots p_m^2$$

På høyre side av likhetstegnet forekommer alle primfaktorene et like antall ganger (spesielt gjelder dette for primfaktoren 3), men på venstre side forekommer primfaktoren 3 et odde antall ganger. Det betyr at vi har funnet to forskjellige primfaktoriseringer av det samme tallet, noe som er umulig ifølge aritmetikkens fundamentalteorem. Altså har vi vist at antagelsen om at $\sqrt{3}$ er rasjonal leder til en selvmotsigelse, så eneste mulighet er at $\sqrt{3}$ er irrasjonal.

Oppgave 2.2.13

Anta at $a > 0$. Vi skal vise at uansett hvor stor $b \in \mathbf{R}$ er, så fins en $n \in \mathbf{N}$ slik at $na > b$. Siden $a > 0$, er dette ekvivalent med å vise at vi kan finne en $n \in \mathbf{N}$ slik at $n > b/a$. Men dette følger direkte fra Arkimedes prinsipp som sier at vi for ethvert reelt tall r, og dermed spesielt for $r = b/a$, kan finne et naturlig tall n slik at $n > r$.

Oppgave 2.3.3

b) Mengden $\mathbf{N}$ er kun nedad begrenset med største nedre skranke 1.

d) Da eksponentialfunksjonen er strengt voksende, blir utsagnet

$$-2 < \ln x \leq 3$$

ekvivalent med utsagnet

$$e^{-2} < x \leq e^3$$

Mengden $M = \{x : -2 < \ln x \leq 3\}$ er derfor lik intervallet $(e^{-2}, e^3]$ som er både oppad og nedad begrenset med $\sup M = e^3$ og $\inf M = e^{-2}$. Her er $\sup M \in M$, men $\inf M \notin M$.

Oppgave 2.3.5

a) Vi viser ulikhet begge veier.

   i) Siden $\sup A$ er en øvre skranke for A og $\sup B$ er en øvre skranke for B, blir $\max(\sup A, \sup B)$ en øvre skranke både for A og for B, altså en øvre skranke for $A \cup B$. Og da $\sup(A \cup B)$ er mindre enn enhver annen øvre skranke for $A \cup B$, følger at $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$.

   ii) Siden $\sup(A \cup B)$ er en øvre skranke for $A \cup B$, blir $\sup(A \cup B)$ også en øvre skranke for hver av delmengdene A og B. Og da $\sup A$ og $\sup B$ er mindre enn enhver annen øvre skranke for henholdsvis A og B, følger at $\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)$.

   Av i) og ii) følger at $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

b) Siden $A \cap B$ er en delmengde både av A og av B, blir både $\sup A$ og $\sup B$ øvre skranker for $A \cap B$. Og da $\sup(A \cap B)$ er mindre enn enhver annen øvre skranke for $A \cap B$, følger generelt ulikheten $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$.

   Denne ulikheten kan imidlertid ikke skjerpes til en likhet. Lar vi for eksempel $A = \{1, 2\}$ og $B = \{1, 3\}$, blir $\sup(A \cap B) = 1$ som er forskjellig fra $\min(\sup A, \sup B) = 2$.

c) Vi viser ulikhet begge veier.

   i) Siden $\inf A$ er en nedre skranke for A og $\inf B$ en nedre skranke for B, blir $\min(\inf A, \inf B)$ en nedre skranke både for A og for B, altså en nedre skranke for $A \cup B$. Og da $\inf(A \cup B)$ er større enn enhver annen nedre skranke for $A \cup B$, følger at $\inf(A \cup B) \geq \min(\inf A, \inf B)$.

ii) Siden $\inf(A \cup B)$ er en nedre skranke for $A \cup B$, blir $\inf(A \cup B)$ også en nedre skranke for hver av delmengdene A og B. Og da $\inf A$ og $\inf B$ er større enn enhver annen nedre skranke for henholdsvis A og B, følger at $\inf(A \cup B) \leq \min(\inf A, \inf B)$.

Av i) og ii) følger at $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

d) Siden $A \cap B$ er en delmengde både av A og av B, blir både $\inf A$ og $\inf B$ nedre skranker for $A \cap B$. Og da $\inf(A \cap B)$ er større enn enhver annen nedre skranke for $A \cap B$, følger generelt ulikheten $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$.

Denne ulikheten kan imidlertid ikke skjerpes til en likhet. Lar vi for eksempel $A = \{2, 3\}$ og $B = \{1, 3\}$, blir $\inf(A \cap B) = 3$ som er forskjellig fra $\max(\inf A, \inf B) = 2$.

Oppgave 2.3.6

a) Vi viser likheten $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ ved å vise ulikhet begge veier.

i) Da åpenbart $a + b \leq \sup A + \sup B$ for alle $a \in A$ og $b \in B$, følger det at $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.

ii) For enhver positiv ε finnes en $a \in A$ og en $b \in B$ slik at $a > \sup A - \varepsilon/2$ og $b > \sup B - \varepsilon/2$. Da er $a + b > \sup A + \sup B - \varepsilon$ og følgelig $\sup(A + B) > \sup A + \sup B - \varepsilon$. Siden dette gjelder for alle $\varepsilon > 0$, må vi ha $\sup(A + B) \geq \sup A + \sup B$.

b) Vi viser likheten $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ ved å vise ulikhet begge veier.

i) Da åpenbart $a + b \geq \inf A + \inf B$ for alle $a \in A$ og $b \in B$, følger det at $\inf(A + B) \geq \inf A + \inf B$.

ii) For enhver positiv ε finnes en $a \in A$ og en $b \in B$ slik at $a < \inf A + \varepsilon/2$ og $b < \inf B + \varepsilon/2$. Da er $a + b < \inf A + \inf B + \varepsilon$ og følgelig $\inf(A + B) < \inf A + \inf B + \varepsilon$. Siden dette gjelder for alle $\varepsilon > 0$, må vi ha $\inf(A + B) \leq \inf A + \inf B$.

Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 3

I dette kapittelet har mange av oppgavene et mindre teoretisk preg enn i de foregående kapitlene, og jeg regner derfor med at lærebokas eksempler og fasit er dekkende for de rent regnemessige oppgavene. Jeg har derfor prioritert å lage løsningsforslag til oppgaver som tester din geometriske forståelse av de komplekse tallene (oppgave 3.2.7 og 3.2.10) og gir øvelse i matematisk argumentasjon (oppgave 3.1.10, 3.2.12 og 3.2.15). Du vil likevel også finne enkle eksempler på hvordan du oversetter frem og tilbake mellom kartesisk form og polarform (oppgave 3.2.3, 3.2.5, 3.3.1 og 3.3.3), hvordan du finner tredjerøtter (oppgave 3.4.3), og hvordan du kan løse komplekse annengradsligninger (oppgave 3.4.9 og 3.4.11). Oppgave 3.3.8 viser en typisk anvendelse av De Moivres formel, mens oppgave 3.4.14 gir deg god trening i å løse en kompleks annengradsligning og uttrykke løsningen både på kartesisk og polar form.

Oppgave 3.1.5

Vi skal løse de oppgitte ligningene.

a)
$$\begin{aligned} 2iz &= 3+4i \\ z &= \frac{3+4i}{2i} = \frac{(3+4i)(-2i)}{2i(-2i)} \\ &= \frac{-6i-8i^2}{4} = \underline{\underline{2-\frac{3}{2}i}} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} (1+i)z+3 &= 1-i \\ (1+i)z &= -2-i \\ z &= \frac{-2-i}{1+i} = \frac{(-2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{-2-i+2i+i^2}{1+1} = \underline{\underline{\frac{-3+i}{2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 3.1.10

Anta at $z+w$ og zw er reelle. Vi skal vise at da er enten begge tallene z og w reelle eller så er de konjugerte av hverandre.

La $z = a+ib$ og $w = c+id$. Da har vi

$$\begin{aligned} z+w &= (a+c)+i(b+d) \\ zw &= (ac-bd)+i(ad+bc) \end{aligned}$$

At $z + w$ og zw er reelle betyr at deres imaginærdeler er lik null, det vil si at

$$b + d = 0$$
$$ad + bc = 0$$

Den første ligningen gir $b = -d$. Setter vi dette inn i den andre ligningen, får vi $d(a-c) = 0$, som er oppfylt når $d = 0$ og når $a = c$. Hvis $d = 0$ har vi $b = d = 0$, det vil si at z og w er reelle. Hvis $a = c$ har vi $z = a + ib$ og $w = c + id = a - ib$, det vil si at z og w er konjugerte.

Oppgave 3.2.3

b) Vi skal finne modulusen og argumentet til $z = -i$.

Modulusen er

$$r = |-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \underline{\underline{1}}$$

Argumentet er bestemt ved at

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{r} = 0$$

og

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

Dette betyr at

$$\theta = \underline{\underline{\frac{3\pi}{2}}}$$

e) Vi skal finne modulusen og argumentet til $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Modulusen er

$$r = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{1+3} = \underline{\underline{2}}$$

Argumentet er bestemt ved at

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{r} = \frac{1}{2}$$

og

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dette betyr at

$$\theta = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$$

Oppgave 3.2.5

Vi skal skrive de komplekse tallene på formen $z = a + ib$.

a) $r = 4$ og $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 4(0+i) = \underline{\underline{4i}}$$

b) $r = 1$ og $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$$z = 1\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}}}$$

c) $r = 2$ og $\theta = \frac{\pi}{6}$.

$$z = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big) = 2(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\frac{1}{2}) = \underline{\underline{\sqrt{3} + i}}$$

d) $r = \frac{1}{2}$ og $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

$$z = \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\Big) = \frac{1}{2}(0 - i) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}i}}$$

Oppgave 3.2.7a

Gitt tallene

$$z = 2\Big(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\Big) \text{ og } w = 3\Big(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\Big)$$

Ifølge teorem 3.2.3 har produktet zw modulus $r = 2\cdot 3 = 6$ og argument $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$. Altså blir

$$zw = 6\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) = \underline{\underline{6i}}$$

Oppgave 3.2.10

Vi skal skissere de oppgitte områdene i det komplekse planet.

a) $\{z : |z| = 1\}$

Dette er alle punkter z som har avstand lik 1 fra origo, det vil si alle punkter på enhetssirkelen.

b) $\{z : |z-1| < 2\}$

Dette er alle punkter z som har avstand mindre enn 2 fra punktet $(1,0)$, det vil alle punkter i det indre av en sirkel med radius 2 om punktet $(1,0)$.

c) $\{z : |z - (i+1)| \geq \frac{1}{2}\}$

Dette er alle punkter z som har en avstand på minst $\frac{1}{2}$ fra punktet $i+1=(1,1)$, det vil si alle punkter på og utenfor en sirkel med radius $\frac{1}{2}$ om punktet $(1,1)$.

d) $\{z : |z-2| < |z-i+2|\} = \{z : |z-2| < |z-(i-2)|\}$

Dette er alle punkter z som har kortere avstand til punktet $(2,0)$ enn til punktet $i-2=(-2,1)$, det vil si alle punkter som ligger ekte under linjen $y=4x+\frac{1}{2}$.

Dette kan vi enten se geometrisk (tegn figur), eller ved følgende utregning. La $z=x+iy$. Kvadrerer vi den gitte ulikheten, får vi

$$\begin{aligned}
|z-2|^2 &< |z-i+2|^2 \\
(x-2)^2+y^2 &< (x+2)^2+(y-1)^2 \\
x^2-4x+4+y^2 &< x^2+4x+4+y^2-2y+1 \\
2y &< 8x+1 \\
y &< 4x+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Oppgave 3.2.12

Vi skal vise at (vektorene tilsvarende) de to komplekse tallene z og w står normalt på hverandre hvis og bare hvis z/w er et rent imaginært tall.

Dersom z og w har argumenter θ_1 og θ_2 henholdsvis, får z/w argument $\theta_1-\theta_2$. Tallet z/w er rent imaginært hvis og bare hvis argumentet er et odde multiplum av $\pi/2$, det vil si $\theta_1-\theta_2=(2k+1)\pi/2, k\in\mathbf{Z}$. Men det betyr jo nettopp at z og w står normalt på hverandre, da $\theta_1-\theta_2$ er vinkelen mellom vektorene z og w.

På samme måte ser vi at z og w er parallelle hvis og bare hvis z/w er reell. At z/w er reell betyr at argumentet er et multiplum av π, det vil si $\theta_1-\theta_2=k\pi, k\in\mathbf{Z}$. Men det betyr at vektorene z og w enten peker i samme retning eller i motsatt retning, det vil si at de er parallelle.

Oppgave 3.2.15

Vi skal vise at $|z+w|^2+|z-w|^2=2|z|^2+2|w|^2$. Benytter vi at $z\overline{z}=|z|^2$, får vi:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2+|z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)}+(z-w)\overline{(z-w)} \\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w})+(z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \\
&= (z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w})+(z\overline{z}-z\overline{w}-w\overline{z}+w\overline{w}) \\
&= |z|^2+|w|^2+|z|^2+|w|^2 = 2|z|^2+2|w|^2
\end{aligned}$$

Tegner vi et parallellogram utspent av vektorene som tilsvarer de komplekse tallene z og w, vil diagonalene i dette parallellogrammet være $z+w$ og $z-w$. Utregningen ovenfor viser da at summen av kvadratene til sidene i et parallellogram er lik summen av kvadratene til diagonalene.

Oppgave 3.3.1

b) Vi skal skrive tallet $e^{-\frac{i\pi}{4}}$ på formen $a+ib$.

$$e^{-\frac{i\pi}{4}} = e^0\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}}}$$

Oppgave 3.3.3

b) Vi skal skrive tallet $z = 4-4i$ på formen $re^{i\theta}$.

$$r = \sqrt{4^2+(-4)^2} = \sqrt{2\cdot 16} = 4\sqrt{2}$$

Siden $\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z)$ ser vi at $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Altså har vi

$$z = \underline{\underline{4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}}$$

Oppgave 3.3.8

Vi skal regne ut $(1+i)^{804}$ og $(\sqrt{3}-i)^{173}$ ved hjelp av de Moivres formel. Da $1+i$ har modulus $\sqrt{2}$ og argument $\frac{\pi}{4}$ får vi

$$\begin{aligned}
(1+i)^{804} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{804} \\
&= \sqrt{2}^{804}\left(\cos\frac{804\pi}{4} + i\sin\frac{804\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}^{(2\cdot 402)}(\cos 201\pi + i\sin 201\pi) \\
&= \left(\sqrt{2}^2\right)^{402}\left(\cos(200\pi+\pi) + i\sin(200\pi+\pi)\right) \\
&= 2^{402}(\cos\pi + i\sin\pi) \\
&= \underline{\underline{-2^{402}}}
\end{aligned}$$

Og da $\sqrt{3}-i$ har modulus 2 og argument $-\frac{\pi}{6}$ får vi

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}-i)^{173} &= \left(2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\right)^{173} \\
&= 2^{173}\left(\cos\frac{-173\pi}{6} + i\sin\frac{-173\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{173}\left(\cos\left(28\pi+\frac{5\pi}{6}\right)-i\sin\left(28\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\right)\\
&= 2^{173}\left(\cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\\
&= 2^{173}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-i\frac{1}{2}\right)\\
&= \underline{\underline{-2^{172}(\sqrt{3}+i)}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3.4.3b

Vi skal finne alle tredjerøttene til $z=-i$ og skrive dem på formen $re^{i\theta}$ og $a+ib$.

$$
\begin{aligned}
z &= -i = e^{-\frac{\pi i}{2}+2\pi ki}\\
z^{\frac{1}{3}} &= e^{-\frac{\pi i}{6}+\frac{2\pi ki}{3}}
\end{aligned}
$$

Setter vi nå etter tur $k=0$, $k=1$ og $k=2$, får vi de tre tredjerøttene

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \underline{\underline{e^{-\frac{\pi i}{6}}}} = \cos(-\tfrac{\pi}{6})+i\sin(-\tfrac{\pi}{6}) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}i}}\\
w_1 &= e^{-\frac{\pi i}{6}+\frac{2\pi i}{3}} = e^{\frac{3\pi i}{6}} = \underline{\underline{e^{\frac{\pi i}{2}}}} = \underline{\underline{i}}\\
w_2 &= e^{-\frac{\pi i}{6}+\frac{4\pi i}{3}} = \underline{\underline{e^{\frac{7\pi i}{6}}}} = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}i}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3.4.9a

Annengradsligningen $z^2+2z+4=0$ har løsningene

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot4}}{2}\\
&= \frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2} = \frac{-2\pm 2i\sqrt{3}}{2}\\
&= -1\pm i\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

det vil si

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \underline{\underline{-1+i\sqrt{3}}}\\
z_2 &= \underline{\underline{-1-i\sqrt{3}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3.4.11b

Annengradsligningen $z^2+2iz+5=0$ har løsningene

$$
z = \frac{-2i\pm\sqrt{(2i)^2-4\cdot1\cdot5}}{2}
$$

$$= \frac{-2i \pm \sqrt{-24}}{2} = \frac{-2i \pm 2i\sqrt{6}}{2}$$
$$= -i \pm i\sqrt{6}$$

det vil si

$$z_1 = \underline{\underline{i(\sqrt{6} - 1)}}$$
$$z_2 = \underline{\underline{-i(\sqrt{6} + 1)}}$$

Oppgave 3.4.14

Ligningen $z^2 + 2(1-i)z + 7i = 0$ har løsningene

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2(1-i) \pm \sqrt{4(1-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7i}}{2} \\ &= -(1-i) \pm \sqrt{(1-i)^2 - 7i} = -(1-i) \pm \sqrt{-9i} \\ &= -(1-i) \pm 3\sqrt{-i} \end{aligned}$$

Da $-i = e^{-i\pi/2}$ har vi $\sqrt{-i} = \pm e^{-i\pi/4} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$, slik at uttrykket ovenfor videre blir

$$= -(1-i) \pm 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i) = \left(-1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)(1-i)$$

det vil si

$$z_1 = \underline{\underline{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1\right) - i\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1\right)}} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1\right)(1-i)$$
$$z_2 = \underline{\underline{-\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 1\right) + i\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 1\right)}} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 1\right)(i-1)$$

Da $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ og $i - 1 = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$, blir løsningene på polar form

$$z_1 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = \underline{\underline{(3 - \sqrt{2})e^{-i\pi/4}}}$$
$$z_2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{2}e^{i3\pi/4} = \underline{\underline{(3 + \sqrt{2})e^{i3\pi/4}}}$$

Vektoren z_1 har lengde $3 - \sqrt{2}$ og argument $-\pi/4$, og peker altså nedover i 4. kvadrant. Vektoren z_2 har lengde $3 + \sqrt{2}$ og argument $3\pi/4$, og peker altså oppover i 2. kvadrant (tegn figur).

Oppgave 3.5.5

a) Vi skal vise at i er en rot i polynomet $P(z) = z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 2z + 3$.

$$P(i) = i^4 + 2i^3 + 4i^2 + 2i + 3 = 1 - 2i - 4 + 2i + 3 = \underline{\underline{0}}$$

b) Siden i en rot i polynomet $P(z)$, vet vi ved lemma 3.5.3 at $\bar{i} = -i$ også er en rot i dette polynomet. Men det betyr at $P(z)$ er delelig med $(z-i)(z+i) = z^2+1$. Vi utfører polynomdivisjon:

$$\begin{array}{l}
z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 2z + 3 : z^2 + 1 = \underline{z^2 + 2z + 3} \\
\underline{z^4 + z^2} \\
\quad\; 2z^3 + 3z^2 + 2z + 3 \\
\quad\; \underline{2z^3 + 2z} \\
\qquad\quad 3z^2 + 3 \\
\qquad\quad \underline{3z^2 + 3} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Det gjenstår bare å faktorisere $z^2 + 2z + 3$:

$$\begin{aligned}
z^2 + 2z + 3 &= 0 \\
z &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} \\
z_1 &= -1 + \sqrt{2}i \\
z_2 &= -1 - \sqrt{2}i
\end{aligned}$$

De komplekse og reelle faktoriseringene av $P(z)$ blir dermed:

$$\begin{aligned}
z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 2z + 3 &= \underline{\underline{(z+i)(z-i)(z+1-\sqrt{2}i)(z+1+\sqrt{2}i)}} \\
&= \underline{\underline{(z^2 + 2z + 3)(z^2+1)}}
\end{aligned}$$

Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 4

I seksjon 4.1 gir de innledende oppgavene deg trening i å løse differensligninger, og jeg regner med at det ikke er behov for å utdype lærebokas eksempler og fasit her. Men like viktig som å kunne løse slike ligninger, er det å forstå hvordan man tenker når man skal stille opp ligningene ut ifra en oppgavetekst. Oppgave 4.1.9 og 4.1.11 gir god trening i dette. Oppgave 4.1.14 viser deg en annen anvendelse av differensligninger.

I seksjon 4.3 får du brynet deg på definisjonen av grenseverdi for følger (f.eks i oppgave 4.3.4), men du finner også enkle eksempler på hvordan man regner ut slike grenseverdier i praksis (oppgave 4.3.1 og 4.3.3). Oppgave 4.3.14 illustrerer at differensen mellom to følger som begge går mot uendelig, like gjerne kan gå mot et endelig tall som mot uendelig.

Oppgave 4.1.9

La a_n være antall sekvenser av lengde n som består av 0-er og 1-ere, der første siffer er 1, og hvor to 1-ere aldri følger etter hverandre.

Sekvensen '1' er den eneste lovlige sekvensen av lengde $n = 1$, og sekvensen '10' er den eneste lovlige av lengde $n = 2$. Dermed har vi initialbetingelsene $a_1 = a_2 = 1$.

Anta nå at $n > 2$, og la oss se på hvilke lovlige sekvenser av lengde n som finnes. Det siste sifferet i strengen er enten 0 eller 1, og vi tar for oss de to tilfellene etter tur:

i) Hvis siste siffer i sekvensen er 0, kan de foregående $(n-1)$ sifrene være en hvilken som helst av de a_{n-1} lovlige sekvensene av lengde $n-1$.

ii) Hvis siste siffer i sekvensen er 1, må det nest siste sifferet være 0, siden vi aldri kan ha to 1-ere etter hverandre. Vi har da bare igjen $(n-2)$ sifre i sekvensen, og disse kan være en hvilken som helst av de a_{n-2} lovlige sekvensene av lengde $n-2$.

Disse to tilfellene dekker alle muligheter vi har for lovlige sekvenser av lenge n (og de er disjunkte slik at vi ikke har talt opp samme sekvens flere ganger). Dette viser at a_n er gitt ved differensligningen:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

for $n > 2$ med initialbetingelser $a_1 = a_2 = 1$.

Vi finner først den generelle løsningen av differensligningen

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

Den karakteristiske ligningen er $r^2 - r - 1 = 0$ som har røtter

$$r_1 = 1/2 + \sqrt{5}/2 \quad \text{og} \quad r_2 = 1/2 - \sqrt{5}/2$$

Den generelle løsningen blir derfor:

$$a_n = A(1/2 + \sqrt{5}/2)^n + B(1/2 - \sqrt{5}/2)^n$$

Initialbetingelsene gir:

$$\begin{aligned} a_1 &= A(1/2 + \sqrt{5}/2) + B(1/2 - \sqrt{5}/2) = 1 \\ a_2 &= A(1/2 + \sqrt{5}/2)^2 + B(1/2 - \sqrt{5}/2)^2 = 1 \end{aligned}$$

Løser vi disse ligningene (se kommentar nedenfor), får vi $A = 1/\sqrt{5}$ og $B = -1/\sqrt{5}$. Den spesielle løsningen blir derfor:

$$\underline{\underline{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}}$$

(Merk at dette er den samme løsningen som i eksempel 4.1.8 fordi differensligningen vi startet med er identisk med Fibonaccis relasjon.)

Tips til utregningen:

For å få enkel regning, kan vi først samle leddene som om vi skulle løse ligningene med hensyn på "variablene" $A + B$ og $A - B$:

Av den første ligningen får vi da at

$$(A + B) + \sqrt{5}(A - B) = 2$$

og av den andre ligningen får vi at

$$3(A + B) + \sqrt{5}(A - B) = 2$$

Trekker vi den første ligningen fra den andre, får vi $2(A + B) = 0$, det vil si $A = -B$. Setter vi dette inn igjen i det første uttrykket, får vi $(A - A) + \sqrt{5}(A + A) = 2$, det vil si $2A = 2/\sqrt{5}$. Dermed blir $A = 1/\sqrt{5}$ og $B = -1/\sqrt{5}$.

Oppgave 4.1.11

La x_n være sannsynligheten for at du vinner dersom du starter med n millioner og banken med $100 - n$ millioner. Vi ønsker egentlig å finne x_{90}, men løser problemet for en generell x_n først.

Det er to mulige måter du kan vinne på: Med sannsynlighet $\frac{18}{37}$ vinner du første omgang, innkasserer 1 million og har da sannsynlighet x_{n-1} for å sikre sluttseieren. Den totale sannsynligheten for at du skal vinne på denne måten er $\frac{18}{37}x_{n-1}$. Den andre måten du kan vinne på, er gjennom å tape første omgang (med sannsynlighet $\frac{19}{37}$), gi fra deg 1 million, for deretter å sikre deg sluttseieren med sannsynlighet x_{n-1}. Den totale sannsynligheten for å vinne på denne måten er $\frac{19}{37}x_{n-1}$.

Dermed ser vi at x_n er gitt ved

$$x_n = \frac{18}{37}x_{n+1} + \frac{19}{37}x_{n-1}$$

som lett omformet gir differensligningen

$$18x_{n+1} - 37x_n + 19x_{n-1} = 0$$

Denne har karakteristisk ligning

$$18r^2 - 37r + 19 = 0$$

med røtter

$$r = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 1368}}{2 \cdot 18} = \frac{37 \pm 1}{36}$$

det vil si

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{19}{18}$$

Den generelle løsningen blir da

$$x_n = C + D\left(\frac{19}{18}\right)^n$$

Hvis du starter med null og banken med 100 millioner, så har du tapt. Dermed er $x_0 = C+D = 0$. Starter du med 100 millioner, har du vunnet, så $x_{100} = C + D(\frac{19}{18})^{100} = 1$. Dermed er $D = -C$ og $C = \frac{1}{1-(\frac{19}{18})^{100}}$. Innsatt overfor gir dette den spesielle løsningen

$$x_n = \frac{1}{1 - (\frac{19}{18})^{100}}\left(1 - \left(\frac{19}{18}\right)^n\right)$$

Setter vi $n = 90$ får vi altså

$$x_{90} = \frac{1 - (\frac{19}{18})^{90}}{1 - (\frac{19}{18})^{100}} \approx \underline{\underline{0.58}}$$

Oppgave 4.1.14

La x_n være avviket i middeltemperaturen i måned nr n fra den årlige middeltemperaturen. Vi har

$$x_{n+2} - \sqrt{3}x_{n+1} + x_n = 0$$

med initialbetingelsene $x_1 = -12$ og $x_3 = -6$. Det er varmest i den måneden k hvor x_k er størst, og kaldest i den måneden t hvor x_t er minst. Vi løser differensligningen for å få en formel for x_n:

Den karakteristiske ligningen er $r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0$ som har de to komplekse røttene

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{og} \quad \overline{r_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Disse har modulus:

$$\rho = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

Argumentet til r_1 er bestemt ved at

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{og} \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

det vil si at

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Den generelle (reelle) løsningen blir dermed

$$x_n = E \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + F \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right) \quad \text{hvor } E, F \in \mathbf{R}$$

Av initialbetingelsene får vi

$$x_1 = E \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + F \cdot \frac{1}{2} = -12$$

og

$$x_3 = E \cdot 0 + F \cdot 1 = -6$$

Den siste ligningen sier at $F = -6$, som innsatt i den første ligningen gir

$$E \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 = -12 \iff E = -\frac{18}{\sqrt{3}} = -6\sqrt{3}$$

Den spesielle løsningen blir derfor

$$F(n) = x_n = \underline{\underline{-6\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) - 6\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}}$$

Vi deriverer for å bestemme ekstremalpunktene:

$$\begin{aligned} F'(n) &= 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right) - 6 \cdot \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) \\ &= \sqrt{3}\pi\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right) - \pi\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) \end{aligned}$$

Av dette får vi videre at

$$F'(n) = 0 \iff \pi\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) = \sqrt{3}\pi\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)$$

Siden $\cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta$ nøyaktig når $\theta = \frac{\pi}{6}$ eller $\theta = \frac{7\pi}{6}$, betyr dette at vi må ha

$$\frac{\pi n}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \text{eller} \quad \frac{\pi n}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

det vil si

$$n = 1 \quad \text{eller} \quad n = 7$$

Temperaturfunksjonen har altså ekstremalverdier for $n = 1$ og for $n = 7$. Siden vi vet at $F(1) = x_1 = -12$, og vi har at $F(7) = -F(1) = 12$ (både cosinus og sinus skifter fortegn), ser vi at det er kaldest i måned nr 1 og varmest i måned nr 7.

Vi setter opp en oversikt over temperaturen i de ulike månedene:

$$\begin{aligned}
F(1) &= x_1 = -12 \\
F(2) &= -6\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} - 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3} \\
F(3) &= x_3 = -6 \\
F(4) &= -6\sqrt{3}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big) - 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\
F(5) &= -6\sqrt{3}\cdot\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) - 6\cdot\frac{1}{2} = 6 \\
F(6) &= -6\sqrt{3}\cdot(-1) - 6\cdot 0 = 6\sqrt{3} \\
F(7) &= -F(1) = 12 \\
F(8) &= -F(2) = 6\sqrt{3} \\
F(9) &= -F(3) = 6 \\
F(10) &= -F(4) = 0 \\
F(11) &= -F(5) = -6 \\
F(12) &= -F(6) = -6\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Disse punktene kan nå markeres i et koordinatsystem (gjør dette, og tegn en kontinuerlig temperaturkurve som går gjennom alle disse punktene).

Kommentar:

Vi kunne også ha funnet løsningen uten å derivere, simpelthen ved å observere at formelen $F(n)$ kan omskrives på følgende måte:

$$\begin{aligned}
F(n) &= -6\sqrt{3}\cos\Big(\frac{\pi n}{6}\Big) - 6\sin\Big(\frac{\pi n}{6}\Big) \\
&= -12\bigg(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\Big(\frac{\pi n}{6}\Big) + \frac{1}{2}\sin\Big(\frac{\pi n}{6}\Big)\bigg)
\end{aligned}$$

$$= -12\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)\right)$$

$$= -12\left(\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{6}\right)\right)$$

Dette uttrykket blir minst når $\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{6})$ er størst, det vil si når argumentet $(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{6})$ er lik $\frac{\pi}{2}$, altså når $n = 1$. Uttrykket blir størst når $\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{6})$ er minst, det vil si når argumentet $(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{6})$ er lik $\frac{3\pi}{2}$, altså når $n = 7$.

Oppgave 4.3.1

Vi skal finne grenseverdiene.

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^4 + 2n}{3n^4 - 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8n^4+2n}{n^4}}{\frac{3n^4-7}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8 + \frac{2}{n^3}}{3 - \frac{7}{n^4}} = \frac{8+0}{3-0} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 4}{-2n^3 + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2-4}{n^3}}{\frac{-2n^3+7}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{4}{n^3}}{-2 + \frac{7}{n^3}} = \frac{0-0}{-2+0} = \underline{\underline{0}}$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 + 2n - 13}{7n - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^3+2n-13}{n}}{\frac{7n-4}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 2 - \frac{13}{n}}{7 - \frac{4}{n}} = \underline{\underline{\infty}}$$

Oppgave 4.3.3

Vi skal finne grenseverdiene.

a) $$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n + 2 - n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \underline{\underline{0}}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n})(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}{n + \sqrt{n} - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} + 1}{1} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{n}}{n}} + 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1\right) = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

Oppgave 4.3.4a

Vi skal vise at $\lim_{n\to\infty}(3-\frac{2}{n}) = 3$ ved å bruke definisjon 4.3.1. Vi skal altså vise at følgen $a_n = 3 - \frac{2}{n}$ konvergerer mot $a = 3$. Siden

$$|a_n - a| = \left|3 - \frac{2}{n} - 3\right| = \left|-\frac{2}{n}\right| = \frac{2}{n}$$

må vi vise at uansett hvilken $\varepsilon > 0$ vi blir gitt, kan vi finne et naturlig tall N slik at $|a_n - a| = \frac{2}{n} < \varepsilon$ når $n > \mathbf{N}$. Men dette er lett: Vi velger bare $N \in \mathbf{N}$ til å være et naturlig tall slik at $\frac{2}{N} < \varepsilon$, det vil si slik at $N > \frac{2}{\varepsilon}$. Et slikt naturlig tall N finnes ifølge Arkimedes prinsipp (2.2.6).

Oppgave 4.3.14

Vi skal finne eksempler på følger $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ som er slik at $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ og som samtidig oppfyller:

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$.
La $a_n = 2n$ og $b_n = n$. Da er

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(2n - n) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -\infty$.
La $a_n = n$ og $b_n = 2n$. Da er

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(n - 2n) = \lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty$$

c) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ er et endelig tall.
La $a_n = n$ og $b_n = n - \frac{1}{n}$. Da er

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(n - n + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 5

I kapittel 5 har mange av oppgavene et mer teoretisk preg enn du er vant til fra skolematematikken, og jeg har derfor lagt vekt på å lage løsningsforslag til oppgaver som involverer de formelle definisjonene av kontinuitet (kap 5.1) og grenseverdi (kap 5.4), og som illustrerer hvordan man kan anvende skjæringssetningen (kap 5.2) og ekstramalverdisetningen (kap 5.3) på ulike måter.

Oppgave 5.1.5

Vi minner om at funksjonen f er kontinuerlig i punktet $a \in D_f$ hvis det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $x \in D_f$ og $|x - a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

a) Vi skal vise at $f(x) = 2x + 1$ er kontinuerlig i punktet $x = 2$. For en gitt $\varepsilon > 0$ må vi finne en $\delta > 0$ slik at

$$|x - 2| < \delta \implies |f(x) - f(2)| < \varepsilon$$

Vi har

$$\begin{aligned} |f(x) - f(2)| &= |(2x + 1) - (2 \cdot 2 + 1)| \\ &= |2x + 1 - 5| \\ &= 2|x - 2| \end{aligned}$$

Velger vi nå $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, blir

$$|f(x) - f(2)| = 2|x - 2| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

når $|x - 2| < \delta$.

b) Vi skal vise at $f(x) = x^2$ er kontinuerlig i punktet $x = 3$. For en gitt $\varepsilon > 0$ må vi finne en $\delta > 0$ slik at

$$|x - 3| < \delta \implies |f(x) - f(3)| < \varepsilon$$

Funksjonsdifferensen kan skrives slik:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(3)| &= |x^2 - 3^2| \\ &= |(x + 3)(x - 3)| \\ &= |x + 3||x - 3| \end{aligned}$$

For å holde faktoren $|x+3|$ under en fast skranke velger vi å begrense oss til intervallet $(2, 4)$, hvor $|x - 3| < 1$, slik at $|x| < 4$ og dermed

$|x+3| < 7$. Hvis vi i tillegg sørger for at faktoren $|x-3| < \frac{\varepsilon}{7}$, får vi ialt

$$|f(x) - f(3)| = |x+3||x-3| < 7\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Dette blir følgelig oppfylt for alle x slik at $|x-3| < \delta$ dersom vi velger $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{7})$.

e) Vi skal vise at $f(x) = \frac{1}{x}$ er kontinuerlig i punktet $x = 1$. For en gitt $\varepsilon > 0$ må vi finne en $\delta > 0$ slik at

$$|x-1| < \delta \implies |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

Funksjonsdifferensen kan skrives slik:

$$|f(x) - f(1)| = \left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{|x|}$$

For at denne skal bli mindre enn ε når x ligger i en δ-omegn om 1, må vi sørge for at x holder seg unna origo. Dette kan vi få til ved først å velge $\delta_1 = \frac{1}{2}$. Da blir $|x| > \frac{1}{2}$ dersom $|x-1| < \delta_1$, slik at

$$|f(x) - f(1)| = \frac{|x-1|}{|x|} < 2|x-1|$$

Sørger vi samtidig for at $|x-1| < \delta_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, får vi videre at

$$|f(x) - f(1)| < 2|x-1| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Setter vi derfor $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = \min(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$, har vi nå ialt vist at $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ for alle x slik at $|x-1| < \delta$.

Oppgave 5.1.6a

Vi skal vise at

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

er diskontinuerlig i punktet $x = 0$. Velger vi nemlig en ε slik at $0 < \varepsilon < 1$, vil $f(x) = x + 1 > (\varepsilon - 1) + 1 = \varepsilon$ for alle $x \in (\varepsilon - 1, 0)$. Men det betyr at $|f(x) - f(0)| = f(x) > \varepsilon$ for alle x i dette intervallet. Uansett hvor liten vi velger $\delta > 0$ vil det derfor finnes en x (faktisk uendelig mange) i intervallet $(-\delta, \delta)$ slik at $|f(x) - f(0)| > \varepsilon$. Altså er funksjonen diskontinuerlig i punktet $x = 0$.

Oppgave 5.2.2a

Vi skal vise at $f(x) = \ln x + x$ har nullpunkt i intervallet $(0, 1)$. Siden $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, kan vi finne en x_0 i intervallet $(0, 1)$ slik at $f(x_0) < 0$. Vi kan for eksempel velge $x_0 = 1/e$, som gir $f(1/e) = (-\ln e) + 1/e = -1 + 1/e < 0$. Siden $f(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0$, og funksjonen f er kontinuerlig i intervallet $[\frac{1}{e}, 1]$, følger det av skjæringssetningen at f har et nullpunkt i intervallet $(\frac{1}{e}, 1)$ og dermed også i det større intervallet $(0, 1)$.

Oppgave 5.2.3b

Vi skal vise at grafene til $f(x) = \sin x$ og $g(x) = x^3$ skjærer hverandre i intervallet $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. I endepunktene av intervallet har f og g verdiene

$$f\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{1}{2}, \quad g\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \Big(\frac{\pi}{6}\Big)^3 < \Big(\frac{4}{6}\Big)^3 = \Big(\frac{2}{3}\Big)^3 = \frac{8}{27} < \frac{1}{2}$$
$$f\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{1}{2}\sqrt{3} < 1, \quad g\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \Big(\frac{\pi}{3}\Big)^3 > 1$$

Siden $f(\frac{\pi}{6}) > g(\frac{\pi}{6})$, $f(\frac{\pi}{3}) < g(\frac{\pi}{3})$ og begge funksjonene er kontinuerlige i intervallet $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, så må grafene skjære hverandre ved korollar 5.2.2 i Kalkulus.

Oppgave 5.2.4

La $f(x) = \tan x$ og $g(x) = x$. Da har vi

$$f\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = 1 > \frac{\pi}{4} = g\Big(\frac{\pi}{4}\Big)$$
$$f\Big(\frac{3\pi}{4}\Big) = 1 < \frac{3\pi}{4} = g\Big(\frac{3\pi}{4}\Big)$$

Vi ser av en figur (tegn grafen selv!) at det *ikke* finnes noe tall $c \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ slik at $f(c) = g(c)$. Dette er likevel ikke i strid med korollar 5.2.2, da funksjonen f ikke er kontinuerlig i intervallet (den er diskontinuerlig for $x = \frac{\pi}{2}$).

Oppgave 5.2.6

Vi skal vise at ethvert polynom av odde grad har minst én reell rot. La

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots + a_0 \\ &= x^n\Big(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\Big) \end{aligned}$$

være et polynom av grad n, det vil si at $a_n \neq 0$. Hvis n er et oddetall, vil faktoren x^n i uttrykket ovenfor skifte fortegn med x. For tilstrekkelig store verdier av $|x|$ vil faktoren i parentes ha samme fortegn som det første leddet a_n, idet de øvrige leddene i parentesen går mot null når $|x|$ vokser. Det finnes derfor et (stort) tall $x_0 > 0$ slik at $f(x_0)$ og $f(-x_0)$ har motsatte fortegn. (De behøver ikke derfor være motsatt like store.) Siden funksjonen f er kontinuerlig på intervallet $[-x_0, x_0]$, har den et nullpunkt i intervallet $(-x_0, x_0)$ ifølge skjæringssetningen.

Oppgave 5.2.7

En fjellklatrer starter fra bakken klokken 7 og når toppen klokken 15. Neste dag starter hun nedstigningen klokken 7 og er nede klokken 15.

a) Vi skal vise at det finnes et klokkeslett der hun er like høyt oppe begge dager. Vi lar fjellets høyde være H. Vi lar så $f(t)$ stå for klatrerens høyde over bakken ved et klokkeslett t under oppstigningen og $g(t)$ høyden under nedstigningen. Begge funksjonene er kontinuerlige, og siden $f(7) = 0 < H = g(7)$ og $f(15) = H > 0 = g(15)$, må funksjonsgrafene skjære hverandre for en verdi $t_0 \in (7, 15)$ ifølge korollar 5.2.2 til skjæringssetningen. Det betyr at hun er like høyt oppe ved klokkeslettet t_0 begge dager.

b) Nå antar vi at hun begynner nedstigningen klokken 10 i steden for 7, og at hun er nede klokken 16. Siden hun ikke er oppe før klokken 15 den første dagen, må $f(10) < H = g(10)$. Og siden hun når toppen klokken 15, er hun der klokken 16 også, så vi må ha $f(16) = H > 0 = g(16)$. På samme måte som i punkt a) kan vi derfor trekke den konklusjon at hun også i dette tilfelle er like høyt oppe ved et klokkeslett $t_1 \in (10, 16)$ begge dager.

Oppgave 5.2.8

Vi skal vise at en kontinuerlig funksjon $f : [0, 1] \to [0, 1]$ har et fikspunkt, det vil si at det finnes en $x \in [0, 1]$ slik at $f(x) = x$.

La $g : [0, 1] \to [0, 1]$ være identitetsfunksjonen $g(x) = x$. Siden f antar verdier i intervallet $[0, 1]$, har vi at $f(0) \geq 0 = g(0)$ og $f(1) \leq 1 = g(1)$. Da f (og g) er kontinuerlige, finnes det ved korollar 5.2.2 en $x \in [0, 1]$ slik at $f(x) = g(x)$, altså $f(x) = x$.

Oppgave 5.3.2

a) Siden $g(x) = x$ er kontinuerlig for alle x, blir $f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x}$ kontinuerlig for alle $x \neq 0$ ifølge setning 5.1.2. Funksjonen f er dermed kontinuerlig i hele sitt definisjonsområde (så f er kontinuerlig ifølge definisjon 5.1.8).

b) Siden $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ og $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, er ikke funksjonen begrenset på intervallet $[-1,1]$ og har dermed ingen maksimums- eller minimumspunkter. Dette strider ikke mot ekstremalverdisetningen, siden f ikke er definert for $x = 0$, og dermed ikke er definert på hele intervallet $[-1,1]$.

Oppgave 5.3.4

Vi antar at $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ er kontinuerlig og at grenseverdiene av $f(x)$ når x nærmer seg a ovenfra og b nedenfra eksisterer. Vi skal vise at f er begrenset. Siden $\lim_{x\to a^+} f(x)$ og $\lim_{x\to b^-} f(x)$ eksisterer, kan vi utvide f til en kontinuerlig funksjon definert på det lukkede intervallet $[a,b]$ slik at $f(a) = \lim_{x\to a^+} f$ og $f(b) = \lim_{x\to b^-} f$. Dermed kan vi benytte ekstremalverdisetningen som sikrer at f har maksimums- og minimumsverdi(er) på $[a,b]$. Dette betyr at f er begrenset på $[a,b]$, og dermed også begrenset på det mindre intervallet (a,b).

Oppgave 5.3.5

Anta at $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ er kontinuerlig. Vi skal vise at verdimengden $V_f = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ er et lukket, begrenset intervall.

Vi viser at V_f er lik det lukkede, begrensede intervallet $[f_{\min}, f_{\max}]$ ved å vise inklusjon begge veier.

Inklusjonen $V_f \subseteq [f_{\min}, f_{\max}]$ er oppfylt per definisjon av minimum og maksimum. På den annen side sikrer ekstremalverdisetningen at den kontinuerlige funksjonen f oppnår sitt minimum og maksimum på det lukkede, begrensende intervallet $[a,b]$, så $f_{\min}$ og $f_{\max}$ er med i V_f. Og skjæringssetningen sikrer oss at alle verdier d mellom $f_{\min}$ og $f_{\max}$ også er med i V_f: Den kontinuerlige funksjonen $g(x) = f(x) - d$ er jo negativ i minimumspunktet til f og positiv i maksimumspunktet, og har derfor et mellomliggende nullpunkt c. Men det betyr nettopp at $f(c) = d$. Dermed har vi også vist den omvendte inklusjonen $V_f \supseteq [f_{\min}, f_{\max}]$.

Oppgave 5.4.2

a) Vi skal vise at $\lim_{x\to 2} 3x = 6$. Gitt en $\varepsilon > 0$ må vi produsere en $\delta > 0$ slik at hvis $|x-2| < \delta$ så er $|3x-6| < \varepsilon$. Dette oppnår vi ved å velge $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, idet vi da får $|3x-6| = 3|x-2| < 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

b) Vi skal vise at $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$. Gitt en $\varepsilon > 0$ må vi produsere en $\delta > 0$ slik at hvis $|x-3| < \delta$ så er $|x^2-9| < \varepsilon$. La $h = x-3$. Da er $x = h+3$, slik at vi får

$$|x^2-9| = |(h+3)^2-9| = |h^2+6h+9-9| = |h||h+6|$$

Her ser vi at den andre faktoren $|h+6|$ holder seg mindre enn 7 dersom vi velger $|h| < 1$. Sørger vi samtidig for at den første faktoren $|h|$ er mindre enn $\frac{\varepsilon}{7}$, vil produktet holde seg mindre enn ε. Begge disse kravene blir oppfylt dersom vi velger $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{7})$. For hvis $|h| = |x-3| < \delta$, så er $|x^2-9| = |h||h+6| < \delta \cdot 7 = \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon$.

c) Vi skal vise at $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$. Gitt en $\varepsilon > 0$ må vi finne en $\delta > 0$ slik at hvis $|x-4| < \delta$ så er $|\sqrt{x}-2| < \varepsilon$. Ved hjelp av tredje kvadratsetning ser vi at

$$|\sqrt{x}-2| = \frac{|(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)|}{|\sqrt{x}+2|} = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|} < \frac{|x-4|}{2}$$

Velger vi $\delta = 2\varepsilon$, ser vi at hvis $|x-4| < \delta$ så er

$$|\sqrt{x}-2| < \frac{|x-4|}{2} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Oppgave 5.4.3

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{7x^2+4x^4}{3x^3-2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{7+4x^2}{3x-2} = \frac{7+0}{0-2} = \underline{\underline{-\frac{7}{2}}}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2+2x+7}{\sqrt{x}-4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{8+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{\frac{\sqrt{x}}{x^2}-4} = \frac{8+0+0}{0-4} = \underline{\underline{-2}}$$

c) $$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x}-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{\frac{x^2+3x}{x^2}}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

d) $$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{2+2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Oppgave 5.4.4a

Vi skal avgjøre om funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{for } x \le 1 \\ -4\cos(\pi x) & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

er kontinuerlig i punktet $x = 1$. Vi ser på de ensidige grensene

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1^2 + 2 = 3$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -4\cos(\pi x) = -4\cos\pi = 4$$

Siden $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, eksisterer ikke den tosidige grensen $\lim_{x\to 1} f(x)$, så funksjonen f er ikke kontinuerlig i $x = 1$.

Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 6

I kapittel 6 minner oppgavene mer om de du er vant til fra skolematematikken i den forstand at de er mindre teoripregede enn i foregående kapittel, men de illustrerer likevel nye regnemessige teknikker det kan være lurt å få med seg. De mest teoripregede oppgavene er knyttet til seksjon 6.2, og gir nyttige innblikk i ulike anvendelser av middelverdisetningen.

Oppgave 6.1.3

Vi skal bruke logaritmisk derivasjon (setning 6.1.9).

a) $f(x) = x^2 \cos^4 x \; e^x$

$$\begin{aligned}
\ln|f(x)| &= \ln|x^2 \cos^4 x \; e^x| = \ln|x^2| + \ln|\cos^4 x| + \ln|e^x| \\
&= 2\ln|x| + 4\ln|\cos x| + x \\
\mathrm{D}[\ln|f(x)|] &= \frac{2}{x} + \frac{4}{\cos x}(-\sin x) + 1 \\
&= \frac{2}{x} - 4\tan x + 1 \\
f'(x) &= f(x)\mathrm{D}[\ln|f(x)|] = \underline{\underline{x^2 \cos^4 x \; e^x \left(\frac{2}{x} - 4\tan x + 1\right)}}
\end{aligned}$$

b) $f(x) = (\sin x)^{\frac{1}{17}} \; e^{x^2} \tan x$

$$\begin{aligned}
\ln|f(x)| &= \ln|(\sin x)^{\frac{1}{17}}| + \ln|e^{x^2}| + \ln|\tan x| \\
&= \frac{1}{17}\ln|\sin x| + x^2 + \ln|\tan x| \\
\mathrm{D}[\ln|f(x)|] &= \frac{1}{17} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + 2x + \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{17} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + 2x + \frac{1}{\sin x \cos x} \\
f'(x) &= f(x)\mathrm{D}[\ln|f(x)|] \\
&= \underline{\underline{(\sin x)^{\frac{1}{17}} \; e^{x^2} \tan x \left(\frac{1}{17} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + 2x + \frac{1}{\sin x \cos x}\right)}}
\end{aligned}$$

d) $f(x) = x^{2\cos x} \ln x$

$$\begin{aligned}
\ln|f(x)| &= \ln|x^{2\cos x} \ln x| = \ln|x^{2\cos x}| + \ln|\ln x| \\
&= 2\cos x \ln x + \ln|\ln x| \\
\mathrm{D}[\ln|f(x)|] &= 2(\cos x)' \ln x + 2\cos x(\ln x)' + (\ln|\ln x|)'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\sin x \ln x + \frac{2\cos x}{x} + \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} \\
f'(x) &= f(x)\mathrm{D}[\ln|f(x)|] \\
&= \underline{\underline{x^{2\cos x}\ln x\Big(\frac{2\cos x}{x} - 2\sin x\ln x + \frac{1}{x\ln x}\Big)}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 6.1.6

I en fartskontroll måler politiet at en bilist bruker $t = 25$ sekunder på en strekning som er $s = 500$ meter. Det er en usikkerhet på $\Delta t = 1$ sekund i tidsmålingen. Bruker vi teknikken fra eksempel 6.1.7 til å anslå usikkerheten i målingen av farten $v(t) = \frac{s}{t}$, får vi at den er

$$
\Delta v \approx v'(t)\Delta t = \frac{-s}{t^2}\Delta t = \frac{-500}{25^2}\cdot 1 = -0{,}8
$$

det vil si en usikkerhet på 0,8 m/s.

Oppgave 6.1.9

Vi skal vise at $D[x^2] = 2x$ direkte fra definisjonen av den deriverte.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}[x^2] &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x + \Delta x) = \underline{\underline{2x}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 6.2.3

Vi skal vise at $f(x) = 2 - x^3$ og $g(x) = \ln(2 + x)$ har nøyaktig ett skjæringspunkt i intervallet $[0, 1]$.

Siden begge funksjonene er kontinuerlige og $f(0) = 2 > \ln 2 = g(0)$, $f(1) = 1 < \ln 3 = g(1)$, så har grafene minst ett skjæringspunkt i intervallet $[0, 1]$.

Nå er $f'(x) = -3x^2 < 0$ og $g'(x) = \frac{1}{2+x} > 0$ for alle $x \in (0, 1)$, slik at f er strengt avtagende og g er strengt voksende i $[0, 1]$. Derfor kan grafene ha høyst ett — og dermed nøyaktig ett — skjæringspunkt i intervallet $[0, 1]$.

Oppgave 6.2.5

Vi lar $f(x) = x - \frac{4}{x}$. Da er $f(-1) = -1 + 4 = 3$ og $f(4) = 4 - 1 = 3$, d.v.s. $f(-1) = f(4)$. Deriverer vi funksjonen, ser vi at $f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$ er strengt positiv for alle $x \neq 0$. At f' ikke har noe nullpunkt i intervallet $(-1, 4)$, er ikke i strid med Rolles teorem, fordi $f(x)$ ikke er deriverbar (ikke engang definert) for $x = 0$.

Oppgave 6.2.7

Vi skal vise at det mellom 0 og et tall x alltid finnes en c slik at $\sin x = x\cos c$. Dette er opplagt riktig for $x = 0$, så vi antar at $x \neq 0$. Vi setter $f(x) = \sin x$. Da f er kontinuerlig og deriverbar på intervallet $[0, x]$, finnes det ved middelverdisetningen en $c \in (0, x)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$$

Siden $f'(c) = \cos c$, gir dette at $\cos c = \frac{\sin x}{x}$, det vil si at $\sin x = x\cos c$. Og da $|\cos c| \leq 1$, har vi ialt

$$|\sin x| = |x\cos c| = |x||\cos c| \leq |x| \cdot 1 = |x|$$

I fremstillingen ovenfor har vi stilltiende antatt at $x > 0$. Dersom $x < 0$, gjennomfører vi isteden resonnementet med intervallet $[x, 0]$.

Oppgave 6.2.8

Vi antar $x > -1$ og skal vise at det alltid finnes et tall c mellom 0 og x slik at $\ln(1 + x) = \frac{x}{1+c}$. Dette er opplagt riktig for $x = 0$, så vi antar at $x \neq 0$.

Funksjonen $f(x) = \ln(1 + x)$ er definert og kontinuerlig for alle $x > -1$. Ved middelverdisetningen finnes det da en c mellom 0 og x slik at

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x - 0} = \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

Siden vi også har

$$f'(c) = \frac{1}{1 + c}$$

gir dette

$$\frac{\ln(1 + x)}{x} = \frac{1}{1 + c}$$

som er ekvivalent med at

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1 + c}$$

For $x > 0$ er også $c > 0$, og dermed $\frac{1}{1+c} < 1$. Multiplikasjon med x gir $\frac{x}{1+c} < x$. For $-1 < x < 0$ er også $-1 < c < 0$, og addisjon med 1 gir $0 < 1 + c < 1$, slik at $\frac{1}{1+c} > 1$. Multiplikasjon med x (som nå altså er negativ) gir da også i dette tilfellet $\frac{x}{1+c} < x$, slik at vi får

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1 + c} < x$$

for alle $x > -1$.

Oppgave 6.3.1

Vi skal bruke L'Hôpitals regel til å finne de oppgitte grenseverdiene.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos 2x}{1} = \dfrac{2\cdot 1}{1} = \underline{\underline{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = \underline{\underline{1}}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-\sin x}{-1} = \underline{\underline{1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{6x}$ eksisterer ikke.

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\cos x}{6} = \underline{\underline{-\dfrac{1}{6}}}$

Oppgave 6.3.3

Vi skal finne grenseverdiene.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{2}x^2 = \underline{\underline{0}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{\ln x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

Mellomregning:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \sin\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\sin\frac{1}{x})} = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\sin\frac{1}{x})} = \underline{\underline{e}}$

Mellomregning:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\sin\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \\
&\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x})/(1+\sin\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\sin\frac{1}{x}} = \frac{\cos 0}{1+\sin 0} = 1
\end{aligned}$$

Oppgave 6.3.7

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\right)$$

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}$$
$$= -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

Oppgave 6.3.9

$$\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(e^{\ln(e^x+\sin x)}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+\sin x)}{x}} = \underline{\underline{e^2}}$$

Mellomregning:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+\sin x)}{x} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(e^x+\cos x)/(e^x+\sin x)}{1}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x} = \frac{1+1}{1+0} = 2$$

Oppgave 6.3.17

Vi skal finne tallet a slik at

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+1}{ax}\right)^x = \sqrt{e}$$

For å unngå for mye regning, kan vi benytte oss av den velkjente grensen $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Vi starter med å omforme uttrykket

$$\left(\frac{ax+1}{ax}\right)^x = \left(1+\frac{1}{ax}\right)^x = \left(\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax}\right)^{\frac{1}{a}}$$

Benytter vi nå at $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax} = e$, får vi

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+1}{ax}\right)^x = e^{\frac{1}{a}}$$

Vi ønsker altså at $e^{\frac{1}{a}} = \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$, det vil si at vi må ha $a = \underline{\underline{2}}$.

Alternativ løsning:

Vi kunne også ha omskrevet uttrykket ved hjelp av eksponentialfunksjonen på vanlig måte, for deretter å bruke L'Hôpital på eksponenten:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+1}{ax}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\ln(\frac{ax+1}{ax})}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln(\frac{ax+1}{ax})} = e^{\frac{1}{a}}$$

Mellomregning:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{ax+1}{ax}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{ax})}{x^{-1}}$$

som ved substitusjonen $t = \frac{1}{x}$ blir

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+\frac{t}{a})}{t} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+\frac{t}{a}}\frac{1}{a}}{1} = \frac{1}{a}$$

Fra $e^{\frac{1}{a}} = \sqrt{e}$ ser vi at $a = \underline{\underline{2}}$.

Oppgave 6.3.22

Vi skal avgjøre om funksjonen f definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{for } x > 0 \\ x^2 + \frac{1}{2} & \text{for } x \le 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig og deriverbar i null. Vi ser på de ensidige grensene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1-\cos x}{x^3} - \frac{1}{2x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2-2\cos x - x^2}{2x^3} \\ &\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x - 2x}{6x^2} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x - 2}{12x} \\ &\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin x}{12} = 0 \end{aligned}$$

og

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x} = 0$$

Siden de ensidige grensene er like, eksisterer altså den tosidige grensen $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$, slik at funksjonen f blir deriverbar i punktet $x = 0$. Men dermed er f også kontinuerlig i $x = 0$ ved setning 6.1.8.

Oppgave 6.5.5

Vi skal finne eventuelle asymptoter for funksjonen

$$f(x) = \frac{x\ln(x^2)-1}{\ln x} = \frac{2x\ln x - 1}{\ln x} = 2x - \frac{1}{\ln x}$$

Siden $\ln x$ bare er definert for positive verdier av x, og blir null for $x = 1$, blir funksjonens definisjonsområde $D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$. Funksjonen er kontinuerlig i hele sitt definisjonsområde, så de eneste kandidatene til vertikale asymptoter er $x = 0$ og $x = 1$.

La oss først undersøke hva som skjer når x nærmer seg 0 ovenfra:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(2x - \frac{1}{\ln x}\right) = 0$$

Altså har vi ingen vertikal asymptote for $x = 0$.

Vi undersøker så hva som skjer når x nærmer seg 1. Her blir

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm}\left(2x - \frac{1}{\ln x}\right) = \mp\infty$$

Dermed har vi en vertikal asymptote for $x = 1$.

Vi bruker metoden i 6.5.5 for å finne eventuelle skråasymptoter.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2 - \frac{1}{x\ln x}\right) = 2$$

Siden denne grensen eksisterer, regner vi videre ut

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - 2x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{\ln x} = 0$$

Dette viser at linjen $y = 2x$ er en skråasymptote for funksjonen.

Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 7

I seksjon 7.1 og 7.2 lærer du å løse oppgaver hvor det kan lønne seg å tegne figurer og sette navn på ukjente størrelser. Oppgave 7.3.7 illustrerer hvordan du kan anslå om et estimat gitt ved Newtons metode er for lite eller for stort. I seksjon 7.4 får du trening i å vise at en funksjon er injektiv, og finne den omvendte funksjonen og dens deriverte. I seksjon 7.5 og 7.6 blir du kjent med cotangens og arcusfunksjonene, og får se eksempler på praktisk bruk av dem (f.eks i oppgave 7.6.14).

Oppgave 7.1.1

Vi skal lage en rektangulær innhegning inntil en låve, og ønsker at innhegningen skal ha størst mulig areal. Vi har materialer til 50 meter gjerde som skal utgjøre tre av sidene i innhegningen. Velger vi to av sidene til å være x meter lange, må den siste siden være $50 - 2x$ meter lang, slik at arealet blir

$$A(x) = x(50 - 2x) = 50x - 2x^2, \quad x \in [0, 25]$$

Vi deriverer for å finne det maksimale arealet:

$$A'(x) = 50 - 4x$$

Vi ser at $A'(x) = 0$ for $x = 12.5$. I tillegg er $A'(x) > 0$ for $x < 12.5$ og $A'(x) < 0$ for $x > 12.5$, så $x = 12.5$ er et maksimumspunkt for $A(x)$. Det største arealet blir da

$$A(12.5) = 50 \cdot 12.5 - 2(12.5)^2 = 312.5, \text{ det vil si } \underline{\underline{312.5 \text{ m}^2}}.$$

Oppgave 7.1.3

Vi skal finne ut hvor B skal ligge for at avstanden fra A til C via B skal bli minst mulig (se figur til oppgaven i Kalkulus). Her kan vi benytte et enkelt geometrisk argument til å løse oppgaven. La C' være speilingen av C om den nedre horisontale linjen på figuren, kall fotpunktet for normalen fra C ned på denne linja for D og kall fotpunktet for normalen fra A ned på denne linja for E. Da er $|BC| = |BC'|$ siden de to rettvinklede trekantene BDC' og BDC er kongruente. Men det betyr at avstanden fra A til C via B er lik avstanden fra A til C' via B. Den sistnevnte avstanden er kortest når B ligger på den rette linjen mellom A og C', det vil si når trekantene AEB og $C'DB$ er formlike (vinklene BEA og BDC' er rette, og vinklene EBA og DBC' er toppvinkler). Det betyr at vi må ha

$$\frac{|EB|}{|AE|} = \frac{|DB|}{|C'D|}$$

altså

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \frac{9-x}{4} \\ 2x &= 9 - x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Avstanden fra A til C via B blir altså minst når vi har $\underline{\underline{x = 3}}$.

Oppgave 7.1.5

Vi skal finne det maksimale volumet til en rett sirkulær kjegle hvor sidekanten har lengde $L = 9$. La r være radius i sirkelen og h være høyden til kjeglen (se figuren til oppgaven i Kalkulus). Ved Pythagoras formel har vi da at $r^2 = L^2 - h^2$. Setter vi dette inn i formelen for volumet V av kjeglen, får vi

$$V(h) = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}(L^2 - h^2)h$$

Vi deriverer for å finne ekstremalverdier:

$$\begin{aligned} V'(h) &= \frac{\pi}{3}\Big((-2h)h + (L^2 - h^2)\cdot 1\Big) \\ &= \frac{\pi}{3}(-3h^2 + L^2) = \pi\Big(\frac{L^2}{3} - h^2\Big) \end{aligned}$$

Setter vi inn $L = 9$, får vi altså

$$V'(h) = \pi\Big(\frac{9^2}{3} - h^2\Big) = \pi(27 - h^2)$$

Vi ser at $V'(h) = 0$ når $h = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$. Siden høyden h ikke kan være negativ, er eneste mulighet at $h = 3\sqrt{3}$. Da vi har at $V'(h) > 0$ for $0 < h < 3\sqrt{3}$ og $V'(h) < 0$ for $h > 3\sqrt{3}$, blir $h = 3\sqrt{3}$ et maksimumspunkt for $V(h)$. Det maksimale volumet til kjeglen blir dermed

$$V(3\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}(9^2 - (3\sqrt{3})^2)\cdot 3\sqrt{3} = \pi(81 - 27)\sqrt{3} = \underline{\underline{54\sqrt{3}\pi}}$$

Oppgave 7.2.1

Vi har en 4 meter lang stige som står opptil en vegg på flatt underlag (tegn figur!). Vi lar høyden til toppen av stigen på et tidspunkt t være

$x(t)$, mens avstanden mellom foten og veggen er $y(t)$. Sammenhengen mellom x og y er da ifølge Pythagoras formel gitt ved

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 16$$

og derivasjon av denne ligningen med hensyn på tiden t gir

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

Foten av stigen glir vekk med en konstant hastighet lik 0.5 m/s. Vi er interessert i det øyeblikket hvor $x = 2$, $y = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ og $y'(t) = \frac{1}{2}$, og setter vi dette inn i ligningen ovenfor, får vi

$$4x'(t) + 2\sqrt{3} = 0$$

det vil si

$$x'(t) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}} \approx -0.87$$

Toppen av stigen beveger seg altså mot bakken med en hastighet på 0.87 meter per sekund idet den befinner seg 2 meter over bakken.

Oppgave 7.2.2

En rett sirkulær kjegle med vertikal akse og med spissen ned fylles med vann med hastigheten 100 cm^3/s. Kjeglen har en høyde på 40 cm som er lik radien i toppflaten. Radien i vannets toppflate ved en vannhøyde h er dermed lik h, og volumet av vannet i kjeglen ved denne høyden blir

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

Deriverer vi uttrykket med hensyn på tiden t, får vi

$$V'(t) = \pi h(t)^2 h'(t)$$

det vil si

$$h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi h(t)^2}$$

For $V'(t) = 100$ og $h(t) = 10$ gir dette

$$h'(t) = \frac{100}{\pi 10^2} = \frac{1}{\pi} \approx \underline{\underline{0.32}}$$

Når vannet har en høyde på 10 cm, stiger det altså med en hastighet omtrent lik 0.32 cm/s.

Oppgave 7.2.7
En lommelykt lyser opp en sektor på 60 grader. Vi går mot et gjerde med en hastighet på 1 m/s, og skal finne ut hvor fort den opplyste lengden av gjerdet minker. Vi lar avstanden fra gjerdet være $y(t)$, mens det opplyste området har lengde $x(t)$. Da har vi

$$\frac{x(t)/2}{y(t)} = \tan 30^\circ \iff x(t) = 2y(t)\tan 30^\circ = 2y(t)\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Ved å derivere får vi

$$x'(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot y'(t)$$

Siden vi går mot gjerdet med hastigheten $y'(t) = 1$, minker lengden av det opplyste området med $\underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{3}\text{ m/s}}}$.

Oppgave 7.3.1

a) Vi skal bruke Newton's metode to ganger for å finne et tilnærmet nullpunkt for $f(x) = x^5 + 3x - 7$ i intervallet $[1, 2]$. Startverdi er $x_0 = 1.5$. Den neste tilnærmelsen er gitt ved

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^5 + 3x_0 - 7}{5x_0^4 + 3} \approx 1.320$$

og anvender vi metoden en gang til med ny startverdi x_1, finner vi

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^5 + 3x_1 - 7}{5x_1^4 + 3} \approx 1.27$$

(Det eksakte nullpunktet er 1.26 med to desimalers nøyaktighet.)

Oppgave 7.3.7

a) Vi skal studere grafen til funksjonen $f(x) = e^{\sqrt{x}} - 3$. Siden $f(1) = e - 3 < 0$, $f(2) = e^{\sqrt{2}} - 3 > 0$ og grafen er kontinuerlig, har grafen minst ett nullpunkt i intervallet $(1, 2)$ ved skjæringsetningen. Siden funksjonen er strengt voksende, kan den ha høyst ett nullpunkt. Dermed må den ha nøyaktig ett nullpunkt i dette intervallet.

b) Vi bruker Newton's metode én gang med startverdi $x_0 = 1$ og får

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{e^{\sqrt{x_0}} - 3}{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}e^{\sqrt{x_0}}} = 1 - 2\frac{e-3}{e} = \frac{6-e}{e} \approx 1.2073$$

Siden den dobbeltderiverte er positiv (sjekk dette selv!) for $x > 1$, er grafen konveks i intervallet $(1, 2)$ og ligger derfor i hele dette intervallet på oversiden av grafens tangent i punktet $x_0 = 1$. Spesielt gjelder dette i skjæringspunktet x_1 mellom tangenten og x-aksen, og det betyr at $f(x_1) > 0$. Siden $f(x_0) = e - 3 < 0$, må grafen skjære x-aksen mellom x_0 og x_1 ifølge skjæringssetningen. Det betyr at den tilnærmede verdien x_1 for nullpunktet er for stor, siden x_1 i vårt tilfelle er større enn x_0. (Det eksakte nullpunktet er 1.2069 med fire desimalers nøyaktighet.)

Oppgave 7.4.1

Vi skal vise at funksjonen er injektiv og finne den omvendte funksjonen.

b) $f(x) = x^2$ og $D_f = [0, \infty)$.

Den deriverte er $f'(x) = 2x > 0$ for $x \in (0, \infty)$. Siden funksjonen er strengt voksende på intervallet $[0, \infty)$, må den være injektiv. Den inverse funksjonen finnes ved å løse ligningen $y = f(x) = x^2$ med hensyn på x. Den eneste løsningen er $x = \sqrt{y}$, da x skal være positiv. Den inverse funksjonen er dermed

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad D_{f^{-1}} = V_f = [0, \infty)$$

c) $f(x) = x^2$ og $D_f = (-\infty, 0]$.

Den deriverte er $f'(x) = 2x < 0$ for $x \in (-\infty, 0)$. Siden funksjonen er strengt avtagende på intervallet $(-\infty, 0]$, må den være injektiv. Vi løser igjen $y = f(x) = x^2$ med hensyn på x, og da x nå er negativ, må vi ha $x = -\sqrt{y}$. Den inverse funksjonen er altså

$$f^{-1}(y) = -\sqrt{y}, \quad D_{f^{-1}} = V_f = [0, \infty)$$

e) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ og $D_f = [-1, \infty)$.

Den deriverte er $f'(x) = 2x + 2 > 0$ for $x \in (-1, \infty)$. Siden funksjonen er strengt voksende på intervallet $[-1, \infty)$, må den være injektiv. Verdimengden til f er $V_f = [2, \infty)$, og vi finner som tidligere den inverse funksjonen ved å løse ligningen $y = f(x)$ med hensyn på x:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= y \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12 + 4y}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{y - 2} \end{aligned}$$

Da x skal ligge i intervallet $[-1, \infty)$, må vi velge løsningen med pluss foran rottegnet. Den inverse funksjonen blir altså

$$f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{y - 2}, \quad D_{f^{-1}} = V_f = [2, \infty)$$

Oppgave 7.4.3

Funksjonen $f(x) = 2xe^x + 1$ med definisjonsområde $D_f = [-1, \infty)$ er injektiv fordi den deriverte $f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(1+x)$ er positiv på intervallet $(-1, \infty)$, slik at f blir strengt voksende på intervallet $[-1, \infty)$. Vi lar g betegne den omvendte funksjonen, og skal beregne $g'(1)$. Vi har åpenbart

$$y = f(x) = 2xe^x + 1 = 1 \iff x = 0$$

og finner dermed

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2e^0(1+0)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppgave 7.4.5

Funksjonen $f(x) = \tan 2x$ har definisjonsområde $D_f = (-\pi/4, \pi/4)$ og er injektiv fordi dens deriverte $f'(x) = \frac{2}{\cos^2 2x}$ er positiv på dette intervallet, slik at funksjonen selv er strengt voksende. Vi skal finne den deriverte til den omvendte funksjonen g i punktet $x = 1$. Vi har $y = f(x) = 1$ når $x = \pi/8$. Dermed blir

$$g'(1) = \frac{1}{f'(\pi/8)} = \frac{1}{2/(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Oppgave 7.5.2

Da den deriverte av cotangens er gitt ved $D[\cot x] = -\frac{1}{\sin^2 x}$, har vi

a) $D[\cot(x^2)] = -\dfrac{1}{\sin^2(x^2)} \cdot D[x^2] = \underline{\underline{-\dfrac{2x}{\sin^2(x^2)}}}$

b) $D[\cot^2 x] = 2\cot x \cdot D[\cot x] = \underline{\underline{-\dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}}}$

Oppgave 7.5.5

a) Vi nedfeller en normal fra toppunktet C i trekanten ABC på grunnlinjen AB, og kaller normalens fotpunkt D. I den rettvinklede trekanten CDB er da $CD = a\sin B$ og $DB = a\cos B$. Av dette følger cotangenssetningen:

$$\cot A = \frac{AD}{CD} = \frac{AB - DB}{CD} = \frac{c - a\cos B}{a\sin B}$$

b) I en trekant er to sider henholdsvis 10 cm og 5 cm lange, og den mellomliggende vinkelen er 30°. Setter vi $c = 10$, $a = 5$ og $B = 30°$, kan vi bruke cotangenssetningen til å finne vinkel A:

$$\cot A = \frac{10 - 5\cos 30}{5\sin 30} = \frac{10 - 5\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}}{5\cdot\frac{1}{2}} = 4 - \sqrt{3}$$

Av dette får vi at

$$\tan A = \frac{1}{4-\sqrt{3}} \implies A \approx \underline{\underline{23.8^\circ}}$$

Da vinkelsummen i trekanten er 180°, blir den siste vinkelen

$$C = 180^\circ - B - A \approx 180^\circ - 30^\circ - 23.8^\circ = \underline{\underline{126.2^\circ}}$$

Oppgave 7.6.1

a) $\arcsin\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$ fordi $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

e) $\arccos\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$ fordi $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

f) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{5\pi}{6}}}$ fordi $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\arctan 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$ fordi $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$

Oppgave 7.6.2

Vi skal derivere funksjonene (vi bruker setning 7.6.2 og 7.6.4).

a) $D[\arcsin\sqrt{x}] = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}}D[\sqrt{x}] = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}}}$

b) $D[\arctan e^x] = \dfrac{1}{1+(e^x)^2}D[e^x] = \underline{\underline{\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}}}$

c) $D[x^2\arcsin x] = 2x\arcsin x + x^2\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\underline{x\left(2\arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}}$

e) $D[\arcsin x + \arccos x] = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\underline{0}}$

Oppgave 7.6.3

Vi skal finne grenseverdiene.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 2x}{x} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+(2x)^2}D[2x]}{1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{1+4x^2} = \underline{\underline{2}}$

c) $$\lim_{x\to\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \underline{\underline{-1}}$$

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x^2)^2}\,2x}{6x}$$
$$= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

Oppgave 7.6.5

Vi studerer funksjonen $f(x) = x\arctan x$.

a) Den førstederiverte er gitt ved
$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$
Her har begge leddene på høyre side samme fortegn som x. Det medfører at også $f'(x)$ har samme fortegn som x. Følgelig er f voksende i intervallet $[0,\infty)$ og avtagende i $(-\infty,0]$.

b) Den andrederiverte blir
$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{(1+x^2) + (1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$
Dermed ser vi at $f''(x) > 0$ for alle x. Det betyr at funksjonen er konveks på hele $\mathbf{R}$.

c) Funksjonen $f(x) = x\arctan x$ er definert for alle x og har derfor ingen vertikale asymptoter. Vi undersøker om den har noen skrå asymptoter ved hjelp av metoden i 6.5.5. Vi finner først at grensen
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$$
eksisterer, slik at vi muligens kan ha to skråasymptoter. Ved hjelp av oppgave 7.6.3c) finner vi videre at begge grensene
$$\lim_{x\to\infty} \left(x\arctan x - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$$
og

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\arctan x+\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

eksisterer. Det betyr at f har asymptotene

$$y=\pm\frac{\pi}{2}x-1$$

Oppgave 7.6.14

En 1 meter høy plakat henger med nedre kant 2 meter over bakken. Vi skal finne den avstanden x som gir størst betraktningsvinkel $\theta(x)$ (se figur i boken). Av figuren ser vi at θ fremkommer som differensen mellom to vinkler:

$$\theta(x)=\arctan\frac{3}{x}-\arctan\frac{2}{x},\quad x\in(0,\infty)$$

Den deriverte blir

$$\begin{aligned}\theta'(x)&=\frac{1}{1+\left(\frac{3}{x}\right)^2}\cdot\frac{-3}{x^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2}\cdot\frac{-2}{x^2}\\&=\frac{2}{x^2\left(1+\left(\frac{2}{x}\right)^2\right)}-\frac{3}{x^2\left(1+\left(\frac{3}{x}\right)^2\right)}=\frac{2}{x^2+4}-\frac{3}{x^2+9}\end{aligned}$$

og mulige ekstremalpunkt for θ er derfor gitt ved

$$\begin{aligned}\theta'(x)=0&\iff\frac{2}{x^2+4}=\frac{3}{x^2+9}\\&\iff 2(x^2+9)=3(x^2+4)\\&\iff x^2=6\\&\iff x=\sqrt{6}\end{aligned}$$

siden $x\geq 0$. Den deriverte funksjonen $\theta'(x)$ er kontinuerlig overalt og kan ikke skifte fortegn andre steder enn ved det eneste nullpunktet $x=\sqrt{6}$. Siden $\theta'(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}>0$ og $\theta'(3)=\frac{2}{13}-\frac{3}{18}=-\frac{1}{78}<0$, må følgelig θ' være positiv i intervallet $(0,\sqrt{6})$ og negativ i $(\sqrt{6},\infty)$. Derfor må $\theta(x)$ ha et maksimum når $x=\sqrt{6}$.

Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 8

I kapittel 8 er integrasjon og integrasjonsteknikker det store temaet, og her er det mange regneoppgaver som gir deg anledning til å trene inn disse teknikkene. Det er få teoripregede oppgaver denne gang, men legg merke til analysens fundamentalteorem i seksjon 8.3, og oppgave 8.3.5, 8.3.6 og 8.3.7 som illustrerer bruk av fundamentalteoremet.

Oppgave 8.2.1

La $f : [1,2] \to \mathbf{R}$ være funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$, og la $\Pi = \{1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2\}$ være en partisjon. Den øvre trappesummen er da

$$\begin{aligned}\O(\Pi) &= 1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx \underline{\underline{0.746}}\end{aligned}$$

og den nedre trappesummen er

$$\begin{aligned}N(\Pi) &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \approx \underline{\underline{0.646}}\end{aligned}$$

Oppgave 8.3.3

Vi skal beregne verdien av integralene.

b)

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^{3x+2}\,dx &= \int_0^2 e^2 e^{3x}\,dx = e^2\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^2 \\ &= \frac{e^2}{3}(e^6 - e^0) = \underline{\underline{\frac{e^8 - e^2}{3}}}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+4x^2} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\Big[\arctan 2x\Big]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(\arctan 1 - \arctan 0) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - 0) = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}\end{aligned}$$

e) Ved substitusjonen $u = \frac{x}{3}$, $du = \frac{1}{3}\,dx$, får vi

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{3\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}$$
$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \Big[\arcsin u\Big]_0^{\frac{1}{3}}$$
$$= \arcsin\frac{1}{3} - \arcsin 0 = \underline{\underline{\arcsin\frac{1}{3}}}$$

Oppgave 8.3.5

a) Vi skal finne den deriverte til

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Ifølge analysens fundamentalteorem (8.3.3) blir den deriverte lik integranden innsatt øvre grense i integralet, det vil si

$$f'(x) = \underline{\underline{e^{-x^2}}}$$

Oppgave 8.3.6

a) Anta at f er kontinuerlig og at g er deriverbar. Vi definerer

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt.$$

og skal finne $G'(x)$. Her er øvre grense i integralet en funksjon av x, så vi må bruke kjerneregelen. La

$$F(u) = \int_a^u f(t)dt$$

Da er

$$G(x) = F(g(x))$$

og kjerneregelen gir da

$$G'(x) = F'(g(x))\cdot g'(x) = \underline{\underline{f(g(x))g'(x)}}$$

hvor vi har benyttet at $F'(u) = f(u)$ ifølge analysens fundamentalteorem.

b) Vi deriverer de oppgitte funksjonene ved hjelp av formelen fra punkt a) ovenfor.

i) $D\left[\int_0^{\sin x} te^{-t}dt\right] = \sin x e^{-\sin x}\cos x = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin 2x\; e^{-\sin x}}}$

ii) $D\left[\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt\right] = e^{-\sqrt{x}^2}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}}}$

iii) $$D\left[\int_{\sin x}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right] = D\left[-\int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right]$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cos x = -\frac{1}{\cos x}\cos x = \underline{\underline{-1}}$$

Oppgave 8.3.7

Vi skal finne grenseverdiene.

a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{-t^2}}{x} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}}{1} = \underline{\underline{1}}$$

b)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x e^{\frac{1}{t}}}{x^2} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x} = \underline{\underline{0}}$$

Oppgave 8.4.1

Vi skal løse de ubestemte integralene.

a) $\int \frac{dx}{x+3} = \underline{\underline{\ln|x+3| + C}}$

b) $$\int (7x + 3x^{\frac{1}{2}} - \cos x)\,dx = 7\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \sin x + C$$
$$= \underline{\underline{\frac{7}{2}x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} - \sin x + C}}$$

c) $\int \frac{dx}{1+2x^2} = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x) + C}}$

f) Ved substitusjonen $u = \frac{x}{\sqrt{7}}$, $du = \frac{1}{\sqrt{7}}\,dx$, får vi

$$\int \frac{4}{\sqrt{7-x^2}}\,dx = 4\int \frac{1}{\sqrt{7}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}}\,dx = 4\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$
$$= 4\arcsin u + C = \underline{\underline{4\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + C}}$$

Oppgave 8.4.3

Vi skal løse de ubestemte integralene.

a) Ved substitusjonen $u = \arcsin x,\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, får vi

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$
$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + C}}$$

c) Ved substitusjonen $u = \sqrt{x},\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, får vi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+(\sqrt{x})^2)}\,dx$$
$$= 2\int \frac{1}{1+u^2}\,du = 2\arctan u + C$$
$$= \underline{\underline{2\arctan\sqrt{x} + C}}$$

d) Vi starter med å splitte opp integralet i to deler

$$\int \frac{7x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 7\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Her er det andre integralet i summen ovenfor lett å beregne:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C_1$$

Det første integralet kan vi løse ved å bruke substitusjonen $u = 1-x^2$, $du = -2x\,dx$, som gir

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C_2$$

I alt får vi da

$$\int \frac{7x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \underline{\underline{-7\sqrt{1-x^2} - \arcsin x + C}}$$

Oppgave 8.6.1

Vi skal finne arealet avgrenset av de oppgitte kurvene.

a) $y = x^4$, x-aksen og linjen $x = 1$. Grafen skjærer x-aksen i $x = 0$. Arealet er derfor gitt ved

$$A = \int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}(1^5 - 0^5) = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

c) $y = \sin x$, x-aksen og linjene $x = -\frac{\pi}{2}$ og $x = -\frac{\pi}{4}$. Grafen ligger under x-aksen i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$. Arealet er derfor

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \sin x\, dx = -\Big[-\cos x\Big]_{-\pi/2}^{-\pi/4} \\ &= \cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) - \cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

f) $y_1 = \frac{1}{1+x^2}$, $y_2 = \frac{x}{2}$ og y-aksen. Det eneste skjæringspunktet mellom grafene y_1 og y_2 er for $x = 1$ (tegn figur!). Vi finner arealet som differensen mellom arealet under y_1 og arealet under y_2:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2}\right) dx = \left[\arctan x - \frac{x^2}{4}\right]_0^1 \\ &= \arctan 1 - \frac{1}{4} - (\arctan 0 - 0) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

Oppgave 8.6.3

Vi skal beregne arealet av det skraverte området mellom grafene til $\cos x$ og $\sin x$ på figuren (se figur i Kalkulus). Skjæringspunktene mellom grafene som avgrenser området er gitt ved

$$\cos x = \sin x \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Skjæringspunktene vi er på jakt etter får vi for $k = -1$ og for $k = 0$, det vil si $x = -\frac{3\pi}{4}$ og $x = \frac{\pi}{4}$. I det aktuelle området ligger grafen til $\cos x$ hele tiden over grafen til $\sin x$, så vi får det søkte arealet ved å integrere $\cos x - \sin x$ mellom de to skjæringspunktene. Arealet blir derfor

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx = \Big[\sin x + \cos x\Big]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = \underline{\underline{2\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 8.6.5

Vi skal finne volumet til omdreiningslegemet som fremkommer når vi dreier grafen om x-aksen.

c) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$. Volumet er gitt ved

$$V = \int_0^1 \pi y^2\, dx = \int_0^1 \pi \frac{1}{1+x^2}\, dx = \Big[\pi \arctan x\Big]_0^1$$

$$= \pi \arctan 1 - \pi \arctan 0 = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{4}}}$$

d) $y = \frac{1}{\sin x}$ mellom $x = \frac{\pi}{6}$ og $x = \frac{\pi}{3}$. Volumet er gitt ved

$$V = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\pi}{\sin^2 x}\, dx = \Big[-\pi \cot x\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = -\pi\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\Big)$$

$$= -\pi\Big(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\Big) = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}}$$

e) $y = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ mellom $x = 0$ og $x = 3$. Volumet er gitt ved

$$V = \int_0^3 \pi\Big(\frac{1}{\sqrt{1+2x}}\Big)^2 dx = \pi \int_0^3 \frac{1}{1+2x}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\ln|1+2x|\Big]_0^3 = \frac{\pi}{2}(\ln 7 - \ln 1) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\ln 7}}$$

Oppgave 8.6.7

Vi skal finne volumet til omdreiningslegemet som fremkommer når vi dreier grafen om y-aksen.

a) $y = x^2$ mellom $x = 0$ og $x = 3$.

$$V = \int_0^3 2\pi x\, y(x)\, dx = 2\pi \int_0^3 x^3\, dx = \frac{2\pi}{4}\Big[x^4\Big]_0^3 = \frac{\pi}{2}(3^4 - 0^4) = \underline{\underline{\frac{81\pi}{2}}}$$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ mellom $x = 0$ og $x = 2$. Ved å bruke substitusjonen $u = 9 - x^2$, $du = -2x\, dx$, finner vi

$$V = \int_0^2 2\pi x \cdot \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = 2\pi \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi\Big(-\frac{1}{2}\Big)\int_9^5 \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \pi \int_5^9 \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$

$$= 2\pi\Big[\sqrt{u}\Big]_5^9 = \underline{\underline{2\pi(3 - \sqrt{5})}}$$

e) $y = \sin(x^2)$ mellom $x = 0$ og $x = \sqrt{\pi}$. Ved å bruke substitusjonen $u = x^2$, $du = 2x\,dx$, finner vi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{\pi}} 2\pi x \sin(x^2)\,dx = \int_0^{\pi} \pi \sin(u)\,du \\ &= \Big[-\pi\cos u\Big]_0^{\pi} = -\pi(\cos\pi - \cos 0) = \underline{\underline{2\pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 8.6.9

a) Området avgrenset av $y = x$ og $y = x^2$ dreies om x-aksen (tegn figur!). Vi skal finne volumet av omdreiningslegemet (bruker setning 8.6.3 i Kalkulus).

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi x^2\,dx - \int_0^1 \pi(x^2)^2\,dx = \pi\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx \\ &= \pi\Big[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \pi\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\Big) = \underline{\underline{\frac{2}{15}\pi}} \end{aligned}$$

b) Området dreies isteden om y-aksen. Vi skal finne volumet av omdreiningslegemet (bruker setning 8.6.5 i Kalkulus).

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x(x - x^2)\,dx = 2\pi\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx \\ &= 2\pi\Big[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^1 = 2\pi\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}} \end{aligned}$$

Oppgave 8.6.11

a) Buelengden av grafen til funksjonen $f(x) = 3x + 4$ fra $x = 0$ til $x = 3$ er gitt ved

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1 + 3^2}\,dx \\ &= \sqrt{10}\int_0^3 dx = \sqrt{10}\Big[x\Big]_0^3 = \underline{\underline{3\sqrt{10}}} \end{aligned}$$

b) Buelengden av grafen til funksjonen $f(x) = \cosh x$ fra $x = 1$ til $x = 2$ er gitt ved

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \sinh^2 x}\,dx = \int_1^2 \cosh x\,dx \\ &= \Big[\sinh x\Big]_1^2 = \underline{\underline{\sinh 2 - \sinh 1}} = \frac{(e^3 + 1)(e - 1)}{2e^2} \end{aligned}$$

Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 9

I kapittel 9 får du innarbeidet flere integrasjonsteknikker, slik som delvis integrasjon, substitusjon og delbrøkoppspaltning. Du finner løsningsforslag til helt enkle drilloppgaver såvel som mer sammensatte eksempler på bruk av disse teknikkene. Det er også et par eksempler på uegentlige integraler, og oppgave 9.5.14 dveler ved et tilsynelatende paradoks som det kan være nyttig å tenke igjennom.

Oppgave 9.1.1

a) Delvis integrasjon gir

$$\int x\sin x\,dx \underset{\uparrow}{=} -x\cos x - \int -\cos x\,dx = \underline{\underline{-x\cos x + \sin x + C}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = x, \ v' = \sin x \\ u' = 1, \ v = -\cos x \end{matrix}}$$

d) Delvis integrasjon to ganger gir

$$\int x^2 e^x\,dx \underset{\uparrow}{=} x^2e^x - \int 2xe^x\,dx$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = x^2, \ v' = e^x \\ u' = 2x, \ v = e^x \end{matrix}}$$

$$\underset{\uparrow}{=} x^2e^x - (2xe^x - \int 2e^x\,dx) = \underline{\underline{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = 2x, \ v' = e^x \\ u' = 2, \ v = e^x \end{matrix}}$$

g) Delvis integrasjon to ganger gir

$$\int (x^2+x)\sin x\,dx \underset{\uparrow}{=} -(x^2+x)\cos x - \int -(2x+1)\cos x\,dx$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = x^2+x, \ v' = \sin x \\ u' = 2x+1, \ v = -\cos x \end{matrix}}$$

$$\underset{\uparrow}{=} -(x^2+x)\cos x - \Big((2x+1)(-\sin x) - \int -2\sin x\,dx\Big)$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = 2x+1, \ v' = -\cos x \\ u' = 2, \ v = -\sin x \end{matrix}}$$

$$= -(x^2+x)\cos x + (2x+1)\sin x + 2\cos x + C$$

$$= \underline{\underline{-(x^2+x-2)\cos x + (2x+1)\sin x + C}}$$

h) Delvis integrasjon gir

$$\int \sqrt{x}\ln x\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{3/2}\frac{1}{x}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \ln x,\ v' = \sqrt{x} \\ u' = \frac{1}{x},\ v = \frac{2}{3}x^{3/2} \end{array}}$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{1/2}\,dx = \underline{\underline{\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2} + C}}$$

Oppgave 9.1.3

a) Delvis integrasjon to ganger gir

$$\int e^{-x}\cos x\,dx \underset{\uparrow}{=} -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \cos x,\ v' = e^{-x} \\ u' = -\sin x,\ v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$\underset{\uparrow}{=} -e^{-x}\cos x - \left(-e^{-x}\sin x - \int -e^{-x}\cos x\,dx\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \sin x,\ v' = e^{-x} \\ u' = \cos x,\ v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\,dx$$

I alt har vi nå fått ligningen

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\,dx$$

som videre gir oss

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C}}$$

b) Delvis integrasjon gir

$$\int \sin^2 x\,dx \underset{\uparrow}{=} -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \sin x,\ v' = \sin x \\ u' = \cos x,\ v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -\sin x\cos x + \int 1 - \sin^2 x\,dx$$

$$= -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx$$

I alt har vi da fått ligningen

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx$$

som videre gir oss

$$\int \sin^2 x\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cos x + C}}$$

Oppgave 9.1.5

Delvis integrasjon gir

$$\int \frac{\ln(x^2)}{x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} -\frac{\ln(x^2)}{x} - \int \frac{2}{x}\Big(-\frac{1}{x}\Big)\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \ln(x^2),\ v' = 1/x^2 \\ u' = 2/x,\ v = -1/x \end{array}}$$

$$= -\frac{\ln(x^2)}{x} + \int \frac{2}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{2}{x} + C$$

$$= -2\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C = \underline{\underline{-\frac{2}{x}(\ln x + 1) + C}}$$

Oppgave 9.1.11

Delvis integrasjon gir

$$\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \arctan x(x - \arctan x) - \int \frac{x - \arctan x}{1+x^2}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \arctan x,\ v' = \frac{x^2}{1+x^2} \\ u' = \frac{1}{1+x^2},\ v = x - \arctan x, \\ \text{(se mellomregning nedenfor)} \end{array}}$$

$$= x\arctan x - \arctan^2 x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\arctan x - \arctan^2 x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan^2 x + C$$

$$= \underline{\underline{x\arctan x - \frac{1}{2}\arctan^2 x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}}$$

Mellomregning:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx = \int \Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big)\,dx = x - \arctan x + D$$

Oppgave 9.1.23

a) Vi lar $I_n = \int_0^1 \arcsin^n x\,dx$. Da har vi

$$I_0 = \int_0^1 dx = \Big[x\Big]_0^1 = \underline{\underline{1}}$$

og

$$I_1 = \int_0^1 \arcsin x\,dx \underset{\uparrow}{=} \Big[x \arcsin x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \arcsin x,\ v' = 1 \\ u' = 1/\sqrt{1-x^2},\ v = x \end{array}}$$

$$= \Big[x \arcsin x\Big]_0^1 - \Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1$$

$$= \arcsin 1 - 0 - \left(-\sqrt{0} + \sqrt{1}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}$$

b) Delvis integrasjon to ganger gir

$$I_n = \int_0^1 \arcsin^n x\,dx \underset{\uparrow}{=} \Big[x\arcsin^n x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{nx \arcsin^{n-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \arcsin^n x,\ v' = 1 \\ u' = \frac{n \arcsin^{n-1} x}{\sqrt{1-x^2}},\ v = x \end{array}}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\left(-\Big[\sqrt{1-x^2}\arcsin^{n-1} x\Big]_0^1 + \int_0^1 (n-1)\arcsin^{n-2} x\,dx\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \arcsin^{n-1} x,\ v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ u' = \frac{(n-1)\arcsin^{n-2} x}{\sqrt{1-x^2}},\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{array}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\left(\left[0\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - 1 \cdot 0^{n-1}\right] + (n-1)I_{n-2}\right)$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-2}}}$$

c) Setter vi inn $n = 3$ i formelen fra punkt b), får vi

$$I_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3(3-1)I_{3-2} = \underline{\underline{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\pi + 6}}$$

Oppgave 9.2.1

a) Ved substitusjon finner vi

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \underset{\uparrow}{=} \int 2\sin u\,du = -2\cos u + C = \underline{\underline{-2\cos\sqrt{x} + C}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \sqrt{x},\ du = dx/2\sqrt{x} \\ dx = 2\,du\sqrt{x} \end{array}}$$

b) Ved substitusjon finner vi

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{u}{1+u^2}2u\,du = 2\int \frac{u^2}{1+u^2}\,du = 2\int \frac{(1+u^2)-1}{1+u^2}\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = \sqrt{x},\ x = u^2, \\ dx = 2u\,du \end{array}}$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right)du = 2(u - \arctan u) + C = \underline{\underline{2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + C}}$$

d) Substitusjon gir

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{u} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = e^x,\ du = e^x dx, \\ dx = du/u \end{array}}$$

$$= \arcsin u + C = \underline{\underline{\arcsin e^x + C}}$$

Oppgave 9.2.3

a) Substitusjon gir

$$\int_0^{\sqrt{2}} xe^{x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^2 \frac{1}{2}e^u\,du = \left[\frac{1}{2}e^u\right]_0^2 = \frac{1}{2}(e^2 - e^0) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(e^2-1)}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = x^2,\ du = 2xdx \\ x = 0 \implies u = 0 \\ x = \sqrt{2} \implies u = 2 \end{array}}$$

c) Substitusjon gir

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \underset{\uparrow}{=} \int_2^3 \frac{u+1}{1-u} 2u\,du = -2\int_2^3 \frac{u^2+u}{u-1}\,du$$

$$\boxed{\begin{gathered} u=\sqrt{x},\ du = dx/2\sqrt{x} \\ x=4 \implies u=2 \\ x=9 \implies u=3 \end{gathered}}$$

$$\underset{\uparrow}{=} -2\int_2^3 \Big(u+2+\frac{2}{u-1}\Big)\,du = -2\left[\frac{1}{2}u^2+2u+2\ln|u-1|\right]_2^3$$

$$\boxed{\text{se polynomdivisjon nedenfor}}$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}3^2+4+2\ln|3-1| - \left(\frac{1}{2}2^2+2+2\ln|2-1|\right)\right)$$

$$= -2\Big(\frac{5}{2}+2+2\ln 2\Big) = \underline{\underline{-(9+4\ln 2)}}$$

Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{l} u^2+u : u-1 = \underline{u+2+\dfrac{2}{u-1}} \\ \underline{u^2-u} \\ \quad 2u \\ \quad \underline{2u-2} \\ \qquad\quad 2 \\ \qquad\quad \underline{2} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Oppgave 9.2.4

Substitusjon gir

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-2^2\sin^2 u}\; 2\cos u\,du$$

$$\boxed{\begin{gathered} x=2\sin u,\ dx = 2\cos u\,du \\ x=2 \implies u=\pi/2 \\ x=0 \implies u=0 \end{gathered}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4\cos^2 u}\; 2\cos u\,du = \int_0^{\pi/2} 4\cos^2 u\,du$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\cos 2u+1)\,du = 2\left[\frac{\sin 2u}{2}+u\right]_0^{\pi/2} = 2\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

Oppgave 9.3.5

a) Ved å dele opp integranden får vi

$$\int \frac{x^2+2x-3}{x+1}\,dx = \int \Big(x+1-\frac{4}{x+1}\Big)\,dx = \underline{\underline{\frac{x^2}{2}+x-4\ln|x+1|+C}}$$

Oppdelingen fikk vi ved polynomdivisjon:

$$\begin{array}{l} x^2+2x-3 : x+1 = \underline{x+1-\dfrac{4}{x+1}} \\ \underline{x^2+\ \ x} \\ \qquad x-3 \\ \qquad \underline{x+1} \\ \qquad\ \ -4 \\ \qquad\ \ \underline{-4} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

d) Ved delbrøkoppspaltning av integranden (se nedenfor) får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx &= \int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int \Big(\frac{-2}{x+1}+\frac{3}{x+2}\Big)\,dx \\ &= \underline{\underline{3\ln|x+2|-2\ln|x+1|+C}} \end{aligned}$$

Vi viser delbrøkoppspaltningen:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{(x+1)(x+2)} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} \\ x-1 &= A(x+2)+B(x+1) \\ &= (A+B)x+(2A+B) \end{aligned}$$

Sammenligning av koeffisienter gir

$$A+B=1, \quad 2A+B=-1$$

det vil si

$$A=-2, \quad B=3$$

e) Ved å skrive om integranden slik at den deriverte av nevneren blir trukket inn i telleren, får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+2}{x^2+2x+2}\,dx &= 2\int \frac{(2x+2)-1}{x^2+2x+2}\,dx \\ &= 2\Big(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\ln|x^2+2x+2| - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx\right) \\
&= \underline{\underline{2\ln|x^2+2x+2| - 2\arctan(x+1) + C}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 9.3.9

Ved delbrøkoppspaltning (se nedenfor) av integranden får vi

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx &= \frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx \\
&= \frac{1}{3}(2\ln|x-1| - \ln|x^2+x+1|) + C \\
&= \frac{1}{3}\ln(x-1)^2 - \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + C \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{3}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + C}}
\end{aligned}
$$

Vi viser delbrøkoppspaltningen:

$$
\begin{aligned}
\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\
x+1 &= A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) \\
&= (A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C
\end{aligned}
$$

Sammenligning av koeffisienter gir

$$
A+B=0, \quad A-B+C=1, \quad A-C=1
$$

det vil si

$$
A=\frac{2}{3}, \quad B=-\frac{2}{3}, \quad C=-\frac{1}{3}
$$

Oppgave 9.3.17

Vi skal beregne $\int \frac{dx}{x^3+8}$.

Vi ser at $(x+2)$ er en faktor i nevneren siden $x=-2$ er et nullpunkt for x^3+8. For å faktorisere nevneren utfører vi polynomdivisjon.

$$
\begin{aligned}
&x^3 + 8 : x + 2 = \underline{x^2 - 2x + 4} = (x-1)^2 + 3 \\
&\underline{x^3 + 2x^2} \\
&\quad - 2x^2 + 8 \\
&\quad \underline{- 2x^2 - 4x} \\
&\qquad\qquad 4x + 8 \\
&\qquad\qquad \underline{4x + 8} \\
&\qquad\qquad\quad 0
\end{aligned}
$$

Delbrøkoppspaltning av integranden gir nå

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^3+8} = \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} \\
1 &= A(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2) \\
1 &= (A+B)x^2 + (2B+C-2A)x + (4A+2C)
\end{aligned}
$$

Sammenholder vi koeffisientene på hver side av identiteten, finner vi

$$
A + B = 0, \quad 2B + C - 2A = 0, \quad 4A + 2C = 1
$$

som gir

$$
A = \frac{1}{12}, \quad B = -\frac{1}{12}, \quad C = \frac{1}{3}
$$

Dermed blir

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+8} &\underset{\boxed{\text{delbrøkoppspaltning}}}{=} \int \left(\frac{\frac{1}{12}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{12}x + \frac{1}{3}}{x^2-2x+4} \right) dx \\
&= \frac{1}{12} \ln|x+2| - \frac{1}{24} \int \frac{(2x-2)-6}{x^2-2x+4}\, dx \\
&= \frac{1}{12} \ln|x+2| - \frac{1}{24} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\, dx + \frac{6}{24} \int \frac{1}{(x-1)^2+3}\, dx \\
&= \frac{1}{12} \ln|x+2| - \frac{1}{24} \ln(x^2-2x+4) + \frac{1}{4} \int \frac{1}{3[(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2+1]}\, dx \\
&\underset{\boxed{u = \frac{x-1}{\sqrt{3}},\ du = \frac{1}{\sqrt{3}}\, dx}}{=} \frac{1}{12} \ln|x+2| - \frac{1}{24} \ln(x^2-2x+4) + \frac{1}{12}\sqrt{3} \int \frac{1}{u^2+1}\, du \\
&= \frac{1}{12} \ln|x+2| - \frac{1}{24} \ln(x^2-2x+4) + \frac{1}{12}\sqrt{3} \arctan(u) + C
\end{aligned}
$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{12}\ln\frac{|x+2|}{\sqrt{x^2-2x+4}} + \frac{\sqrt{3}}{12}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C}}$$

Oppgave 9.3.27

Ved substitusjon får vi først omformet integralet

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{e^{2x}+4e^x+13} \underset{\boxed{\begin{array}{c} z=e^x,\ dz=e^x\,dx \\ dx=\frac{1}{z}dz \end{array}}}{\uparrow =} \int \frac{dz}{z(z^2+4z+13)} = \int g(z)\,dz$$

og bruker så delbrøkoppspaltning på den nye integranden.

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{1}{z(z^2+4z+13)} &= \frac{A}{z} + \frac{Bz+C}{z^2+4z+13} \\ 1 &= A(z^2+4z+13) + (Bz+C)z \\ &= (A+B)z^2 + (4A+C)z + 13A \end{aligned}$$

Sammenligning av koeffisientene gir

$$13A = 1, \quad 4A + C = 0, \quad A + B = 0$$

det vil si

$$A = \frac{1}{13}, \quad B = -\frac{1}{13}, \quad C = -\frac{4}{13}$$

Den nye integranden kan nå omformes slik:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{13}\left(\frac{1}{z} - \frac{z+4}{z^2+4z+13}\right) = \frac{1}{13}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{(2z+4)+4}{z^2+4z+13}\right) \\ &= \frac{1}{13}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{2z+4}{z^2+4z+13} + \frac{4}{(z+2)^2+9}\right)\right) \\ &= \frac{1}{13}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{2z+4}{z^2+4z+13} - \frac{2}{9}\frac{1}{\left(\frac{z+2}{3}\right)^2+1}\right) \end{aligned}$$

Leddvis integrasjon gir dermed

$$\int g(z)\,dz = \frac{1}{13}\left(\ln|z| - \frac{1}{2}\ln(z^2+4z+13) - \frac{2}{9}\cdot 3\arctan\left(\frac{z+2}{3}\right)\right) + D$$

Substituerer vi nå tilbake $z = e^x$, har vi ialt

$$\int f(x)\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{13}\left(x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+4e^x+13) - \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{e^x+2}{3}\right)\right) + D}}$$

Oppgave 9.3.29

Substitusjon og delbrøkoppspaltning gir

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos x)}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_1^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{u(u+1)}\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u=\cos x,\ du=-\sin x\,dx \\ x=0 \implies u=1 \\ x=\pi/3 \implies u=1/2 \end{array}}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \Big(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\Big)\,du = \Big[\ln|u| - \ln|u+1|\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \ln 1 - \ln 2 - \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} = \underline{\underline{\ln\frac{3}{2}}}$$

Oppgave 9.5.1

a) Integrasjonsintervallet er ubegrenset, men integralet konvergerer:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan x\Big]_0^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 0)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

b) Integranden er ubegrenset, men integralet konvergerer:

$$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to 1}\int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to 1}\Big[\arcsin x\Big]_0^{a}$$

$$= \lim_{a\to 1}(\arcsin a - \arcsin 0)$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

e) Integrasjonsintervallet er ubegrenset, men integralet konvergerer:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{a\to\infty}\int_2^{a} \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{3}\lim_{a\to\infty}\int_2^{a} \Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\Big)\,dx$$

$$\boxed{\text{delbrøkoppspaltning}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\lim_{a\to\infty}\Big[\ln|x-1| - \ln|x+2|\Big]_2^a \\
&= \frac{1}{3}\lim_{a\to\infty}(\ln|a-1| - \ln|a-2| - \ln 1 + \ln 4) \\
&= \frac{1}{3}\lim_{a\to\infty}\left(\ln\left|\frac{a-1}{a-2}\right| + \ln 4\right) \\
&= \frac{1}{3}\lim_{a\to\infty}\left(\ln\left|\frac{1-\frac{1}{a}}{1-\frac{2}{a}}\right| + \ln 4\right) \\
&= \frac{1}{3}(\ln 1 + \ln 4) = \underline{\underline{\frac{1}{3}\ln 4}}
\end{aligned}
$$

i) Integralet konvergerer. Ved delvis integrasjon får vi at $\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C$ (dette har du allerede gjort i oppgave 9.1.1b). Dermed får vi:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x\ln x\,dx &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x\ln x\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{1}{2}x^2\Big(\ln x - \frac{1}{2}\Big)\right]_a^1 \\
&= \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\Big(\ln 1 - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}a^2\Big(\ln a - \frac{1}{2}\Big)\right) \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{a\to 0^+} a^2\Big(\ln a - \frac{1}{2}\Big) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}
\end{aligned}
$$

hvor vi i siste overgang har benyttet at $\lim_{a\to 0^+} a^2\ln a = 0$ ifølge setning 6.3.16 i Kalkulus.

Oppgave 9.5.14

Gabriels trompet fremkommer ved at vi dreier grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$, hvor $1 \le x < \infty$, om x-aksen (tegn figur!).

a) Vi finner volumet av Gabriels trompet (bruker setning 8.6.3):

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^\infty \pi f(x)^2\,dx = \lim_{b\to\infty}\pi\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \pi\lim_{b\to\infty}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^b = \pi\lim_{b\to\infty}\Big(1-\frac{1}{b}\Big) = \underline{\underline{\pi}}
\end{aligned}
$$

Så Gabriels trompet har endelig volum.

b) Vi beregner overflaten av Gabriels trompet ved hjelp av den oppgitte formelen:

$$
\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_1^\infty f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \\
&= 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx \\
&> 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx
\end{aligned}
$$

hvor den siste ulikheten skyldes at $\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} > 1$. Men integralet $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ vet vi divergerer mot uendelig, så da må det opprinnelige integralet også divergere (ved sammenligningskriteriet). Det betyr at Gabriels trompet har uendelig overflate.

c) **Påstand:** Vi kan male den (uendelige) innsiden av Gabriels trompet ved å kjøpe nok maling til å fylle det endelige volumet, helle malingen i trompeten og tømme ut det som blir til overs. Dermed har vi malt den uendelige overflaten med endelig mye maling.

Kommentar: I praksis får vi ikke fylt opp hele volumet til trompeten, og dermed får vi ikke malt hele overflaten. Dette skyldes at malingen må ha en viss tykkelse (la oss si diameteren til et atom), mens tuten i trompeten blir vilkårlig smal bare vi beveger oss langt nok inn. Før eller siden blir tuten smalere enn diameteren til et atom, og da får ikke malingen presset seg lenger inn.

Men hvis vi antar at vi har en idealisert “matematisk” maling som kan bli vilkårlig tynn slik at den fyller opp hele volumet til trompeten, ville vi faktisk kunne male den uendelige overflaten av trompeten med endelig mye maling. Dette er egentlig ikke noe mer paradoksalt enn at et integral over et ubegrenset intervall kan bli endelig. Tenk igjennom dette på egenhånd!

Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 10

I kapittel 10 får du trening i å løse ulike typer differensialligninger, og her får du bruk for integrasjonsteknikkene du lærte i forrige kapittel. Men vel så viktig som det regnemessige, er det å lære seg hvordan man tenker når man skal stille opp differensialligninger for å løse praktiske problemer. Dette finner du eksempler på i oppgavene til seksjon 10.2 og 10.4.

Oppgave 10.1.3

a) Vi skal finne alle løsningene til differensialligningen $y' - \frac{2}{x}y = x^2$ på intervallet $(0, \infty)$. Den integrerende faktoren blir her

$$e^{-\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$$

og multiplikasjon med denne faktoren gir ligningen

$$x^{-2}y' - 2x^{-3}y = 1$$

det vil si

$$[x^{-2}y]' = 1$$

Ved å integrere på begge sider får vi

$$x^{-2}y = x + C$$

som gir løsningen

$$y = \underline{\underline{x^3 + Cx^2}}$$

b) Vi skal finne alle løsningene til differensialligningen $y' - 2xy = e^{x^2}$. Her er integrerende faktor

$$e^{-\int 2x\,dx} = e^{-x^2}$$

og multiplikasjon med denne faktoren gir ligningen

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = 1$$

det vil si

$$\left[e^{-x^2}y\right]' = 1$$

Ved å integrere på begge sider får vi

$$e^{-x^2}y = x + C$$

som gir løsningen

$$y = \underline{\underline{e^{x^2}(x + C)}}$$

d) Vi skal finne alle løsningene til differensialligningen $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\arctan x}{x^2}$ på intervallet $(0, \infty)$. Den integrerende faktoren blir

$$e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln x} = x^2$$

og multiplikasjon med denne faktoren gir ligningen

$$x^2y' + 2xy = \arctan x$$

det vil si

$$[x^2y]' = \arctan x$$

Ved å integrere på begge sider får vi

$$x^2y = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \quad \text{(se nedenfor)}$$

som gir løsningen

$$y = \underline{\underline{\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2) + \frac{C}{x^2}}}$$

Ovenfor har vi benyttet delvis integrasjon til å løse integralet

$$\int \arctan x\,dx \underset{\boxed{\begin{array}{c} u = \arctan x,\ v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+x^2},\ v = x \end{array}}}{\overset{\uparrow}{=}} x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Oppgave 10.1.7

Vi skal løse differensialligningen $(x+1)y' + y - 1 = 0, \quad x > -1$.
Denne ligningen er på formen

$$(x+1)y' + y = 1$$

der vi gjenkjenner venstre side som den deriverte til $(x+1)y$, slik at ligningen kan skrives

$$[(x+1)y]' = 1$$

Ved å integrere på begge sider får vi

$$(x+1)y = x + D$$

som gir løsningen

$$y = \frac{x+D}{x+1} = \frac{x+1+(D-1)}{x+1} = \underline{\underline{1 + \frac{C}{x+1}}}$$

der vi har satt $C = D - 1$.

Oppgave 10.1.9

a) Vi skal løse integralet $\int \frac{2x-2}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx$.

Vi ser at nevneren ikke kan faktoriseres ytterligere, siden faktoren $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$ ikke har noe nullpunkt.

Delbrøkoppspaltning av integranden gir

$$\begin{aligned}\frac{2x-2}{(x+1)(x^2+2x+5)} &= \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}\\ 2x-2 &= A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x+1)\\ &= (A+B)x^2+(2A+B+C)x+(5A+C)\end{aligned}$$

Sammenholder vi koeffisientene på hver side av identiteten, får vi

$$A+B=0,\quad 2A+B+C=2,\quad 5A+C=-2$$

som gir

$$A=-1,\quad B=1,\quad C=3$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-2}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx &\underset{\boxed{\text{delbrøkoppspaltning}}}{=} \int\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{x+3}{x^2+2x+5}\right)dx\\
&= -\ln|x+1| + \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+2}{x^2+2x+5}\,dx\\
&= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + \int\frac{2}{(x+1)^2+4}\,dx\\
&= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \int\frac{2}{4[(\frac{x+1}{2})^2+1]}\,dx\\
&\underset{\boxed{u=\frac{x+1}{2},\ du=\frac{1}{2}\,dx}}{=} -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \int\frac{1}{u^2+1}\,du\\
&= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \arctan(u) + C\\
&= \underline{\underline{-\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C}}\end{aligned}$$

b) Vi skal finne alle løsninger til differensialligningen

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x^2-1}y=\frac{2}{x^2+2x+5}\qquad \text{hvor } x>1$$

Den integrerende faktoren blir

$$e^{\int \frac{2}{x^2-1}\,dx} = e^{\int (\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})\,dx} = e^{\ln(\frac{x-1}{x+1})} = \frac{x-1}{x+1}$$

Multipliserer vi ligningen med den integrerende faktoren, får vi

$$\begin{aligned}\left[y\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]' &= \frac{2}{x^2+2x+5}\cdot\frac{x-1}{x+1}\\ y\left(\frac{x-1}{x+1}\right) &= \int \frac{2x-2}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx\\ y &= \left(\frac{x+1}{x-1}\right)\int \frac{2x-2}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx\end{aligned}$$

Men det siste integralet regnet vi ut i punkt a), så vi har ialt

$$\underline{\underline{y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(-\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\right)}}$$

Oppgave 10.2.1

La $y(t)$ være befolkningstallet ved tiden t. Endringen i befolkningen per år er da gitt ved $y'(t)$. Denne endringen skyldes dels en befolkningsvekst på $0.02y(t)$ per år, og dels en netto innvandring på 40 000 personer per år. Setter vi de to uttrykkene for befolkningsveksten lik hverandre, får vi

$$y' = 0.02y + 40\,000$$

Den integrerende faktoren er $e^{\int -0.02\,dt} = e^{-0.02t}$, og multipliserer vi ligningen med denne, får vi

$$e^{-0.02t}y' - 0.02e^{-0.02t}y = 40\,000e^{-0.02t}$$

det vil si

$$\left[e^{-0.02t}y\right]' = 40\,000e^{-0.02t}$$

Integrerer vi begge sider av ligningen, får vi

$$e^{-0.02t}y = -2\,000\,000e^{-0.02t} + C$$

som gir den generelle løsningen

$$y = Ce^{0.02t} - 2\,000\,000$$

Initialbetingelsen $y(0) = 2000000$ gir

$$y(0) = C - 2\,000\,000 = 2\,000\,000$$

Det betyr at $C = 4\,000\,000$, så vår løsning blir

$$y(t) = \underline{\underline{4\,000\,000e^{0.02t} - 2\,000\,000}}$$

Oppgave 10.2.9

La $y(t)$ være vannmengden i demningen ved tiden t. Endringen i vannmengden per sekund er da gitt ved $y'(t)$. Denne endringen skyldes dels et tilsig på 100 m^3 vann per sekund, og dels et utslipp på $10^{-6}y(t)$ m^3 vann per sekund. Setter vi de to uttrykkene for endringen i vannmengden lik hverandre, ser vi at

$$y'(t) = 100 - 10^{-6}y(t)$$

det vil si at vi får den oppgitte differensialligningen

$$y'(t) + 10^{-6}y(t) = 100$$

Dette er en første ordens, lineær differensialligning, og multipliserer vi ligningen med den integrerende faktoren $e^{10^{-6}t}$, får vi

$$(e^{10^{-6}t}y(t))' = 100e^{10^{-6}t}$$

Integrerer vi på begge sider, får vi

$$e^{10^{-6}t}y(t) = \frac{100}{10^{-6}}e^{10^{-6}t} + C = 10^8 e^{10^{-6}t} + C$$

det vil si

$$y(t) = 10^8 + \frac{C}{e^{10^{-6}t}}$$

Når demningen er full inneholder den 10^8 m^3 vann. Vi skal finne ut hvor lang tid det tar fra demningen er tom til den er halvfull. La oss starte målingen av tiden når demningen er tom, det vil si at $y(0) = 0$. Ved hjelp av denne initialbetingelsen får vi bestemt konstanten C:

$$y(0) = 0 \iff 10^8 + \frac{C}{e^0} = 0 \iff C = -10^8$$

Så den spesielle løsningen blir

$$y(t) = 10^8 - \frac{10^8}{e^{10^{-6}t}} = 10^8\Big(1 - \frac{1}{e^{10^{-6}t}}\Big)$$

Vi skal finne ut hvor lang tid t det tar før $y(t) = \frac{1}{2} \cdot 10^8$. Vi har

$$\begin{aligned} 10^8\left(1 - \frac{1}{e^{10^{-6}t}}\right) &= \frac{1}{2} \cdot 10^8 \\ \left(1 - \frac{1}{e^{10^{-6}t}}\right) &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{e^{10^{-6}t}} &= \frac{1}{2} \\ e^{10^{-6}t} &= 2 \\ t &= \underline{\underline{10^6 \ln 2}} \end{aligned}$$

Det tar altså $10^6 \ln 2$ sekunder fra demningen er tom til den er halvfull.

Oppgave 10.2.15

a) En melkekartong der temperaturen var $6°C$ ble stående på kjøkkenbenken i 2 timer. Da var temperaturen i melka $13°C$. Lufttemperaturen var $20°C$. La $T(t)$ være temperaturen i melka ved tiden t, og la A være lufttemperaturen utenfor melkekartongen. Vi regner med at temperaturen i melka endrer seg med en hastighet som er proporsjonal med differansen mellom lufttemperaturen og temperaturen i melka. Dette betyr at

$$T'(t) = \alpha(A - T(t))$$

det vil si at temperaturen i melka er beskrevet ved differensialligningen

$$T' + \alpha T = \alpha A$$

Multipliserer vi med den integrerende faktoren $e^{\alpha t}$, får vi

$$\begin{aligned} T'e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} T &= \alpha e^{\alpha t} A \\ \left[e^{\alpha t} T\right]' &= \alpha e^{\alpha t} A \end{aligned}$$

og integrasjon på begge sider gir

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} T &= e^{\alpha t} A + B \\ T(t) &= \underline{\underline{A + Be^{-\alpha t}}} \end{aligned}$$

Når melka står på kjøkkenbenken er temperaturen i lufta omkring melkekartongen gitt ved lufttemperaturen, det vil si at $A = 20$. Ved tiden $t = 0$ er temperaturen i melka $6°C$. Dette gir oss

$$T(0) = 20 + B = 6 \iff B = \underline{\underline{-14}}$$

Ved tiden $t = 2$ var temperaturen $13°C$, hvilket gir at

$$T(2) = 20 - 14e^{-2\alpha} = 13$$

det vil si

$$\begin{aligned} e^{-2\alpha} &= \frac{1}{2} \\ -2\alpha &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \\ \alpha &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln 2}} \end{aligned}$$

Dermed er temperaturen til melka etter t timer gitt ved

$$T(t) = 20 - 14e^{\frac{t\ln 2}{2}}$$

b) Temperaturen i melka etter tre timer er

$$\begin{aligned} T(3) &= 20 - 14e^{-\frac{3\ln 2}{2}} = 20 - 14e^{\ln 2^{-3/2}} \\ &= 20 - 2^{-3/2}14 \approx \underline{\underline{15.05}} \end{aligned}$$

det vil si at temperaturen er ca 15.05°C.

c) Da temperaturen i melka var 15°C, ble den satt inn i kjøleskapet. Etter 1 time var temperaturen i melka $12°C$. Vi skal finne temperaturen T_k i kjøleskapet. Differensialligningen fra punkt a) og dens generelle løsning gjelder fortsatt (spesielt er konstanten α den samme som vi fant i punkt a). Den eneste forskjellen er at lufttemperaturen A utenfor kartongen nå blir lik temperaturen T_k i kjøleskapet. Setter vi $t = 0$ idet kartongen settes inn i kjøleskapet, gir de nye opplysningene oss

$$\begin{aligned} T(0) &= T_k + Be^{-\alpha 0} = T_k + B = 15 \\ T(1) &= T_k + Be^{-\alpha} = T_k + \frac{B}{\sqrt{2}} = 12 \end{aligned}$$

Fra den første ligningen ovenfor har vi $B = 15 - T_k$ som innsatt i den andre ligningen gir

$$\begin{aligned} T_k + \frac{\sqrt{2}}{2}15 - \frac{\sqrt{2}}{2}T_k &= 12 \\ T_k\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 12 - \frac{\sqrt{2}}{2}15 \\ T_k &= \frac{12 - \frac{\sqrt{2}}{2}15}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx \underline{\underline{4.7574}} \end{aligned}$$

Så temperaturen i kjøleskapet var ca 4.76°C.

Oppgave 10.3.1

Vi skal løse differensialligningen $y' - 3y = e^{2x}$ med initialbetingelsen $y(0) = 0$. Multiplikasjon med den integrerende faktoren e^{-3x} gir

$$e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = e^{-x}$$

det vil si

$$\left[e^{-3x}y\right]' = e^{-x}$$

Ved å integrere på begge sider får vi

$$e^{-3x}y = C - e^{-x}$$

som gir løsningen

$$y = Ce^{3x} - e^{2x}$$

Av initialbetingelsen får vi

$$y(0) = C - 1 = 0 \iff C = 1$$

Så den spesielle løsningen som oppfyller initialbetingelsen vår, er

$$y(x) = \underline{\underline{e^{3x} - e^{2x}}}$$

Oppgave 10.3.3

Vi skal løse $y' + y\tan x = \sin 2x$ med initialbetingelsen $y(0) = 2$. Substitusjonen $u = \cos x,\ du = -\sin x\,dx$ gir

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{1}{u}\,du = -\ln|u| = -\ln|\cos x|$$

Den integrerende faktoren blir dermed $e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{|\cos x|}$, og multiplikasjon med denne faktoren gir ligningen

$$\frac{y'}{\cos x} + y\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos x} = 2\sin x$$

det vil si

$$\left[\frac{y}{\cos x}\right]' = 2\sin x$$

Ved å integrere begge sider av ligningen får vi

$$\frac{y}{\cos x} = -2\cos x + C$$

som gir løsningen

$$y = C\cos x - 2\cos^2 x$$

Vi bestemmer konstanten C ved hjelp av initialbetingelsen:

$$y(0) = C - 2 = 2 \iff C = 4$$

Så den spesielle løsningen blir

$$y(x) = \underline{\underline{4\cos x - 2\cos^2 x}}$$

Oppgave 10.3.5

Vi skal løse differensialligningen

$$x^2 y' + 2xy = \arctan x$$

med initialbetingelsen $y(1) = \frac{\pi}{4}$. Her kan vi gjenkjenne venstre side av ligningen direkte som den deriverte til uttrykket yx^2, slik at ligningen kan skrives

$$\left[yx^2\right]' = \arctan x$$

Vi integrerer på begge sider og løser integralet vi får på høyre side ved hjelp av delvis integrasjon hvor vi setter $u = \arctan x$, $v' = 1$, $u' = \frac{1}{1+x^2}$ og $v = x$. Dette gir

$$\begin{aligned} yx^2 &= \int \arctan x \, dx \\ &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

Divisjon med x^2 gir da at den generelle løsningen er

$$y = \frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2x^2} \ln(1+x^2) + \frac{C}{x^2}$$

Vi bestemmer den ukjente konstanten ved hjelp av initialbetingelsen:

$$y(1) = \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln 2 + C = \frac{\pi}{4} \iff C = \frac{1}{2} \ln 2$$

Den spesielle løsningen som tilfredsstiller vår initialbetingelse blir derfor

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2x^2} \ln(1+x^2) + \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{1}{x^2}}}$$

Oppgave 10.4.1

a) Vi skal løse differensialligningen

$$y' = yx^2$$

og observerer først at $y \equiv 0$ er en løsning. For $y \neq 0$ kan vi separere ligningen og får

$$\frac{y'}{y} = x^2$$

Integrasjon på begge sider av ligningen gir

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x^2\,dx$$

det vil si

$$\ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + D$$

som betyr at

$$|y| = e^{\frac{1}{3}x^3+D} = e^D e^{\frac{1}{3}x^3}$$

Løsningen blir dermed

$$y = \pm e^D e^{\frac{1}{3}x^3} = \underline{\underline{Ce^{\frac{1}{3}x^3}}}$$

hvor C er en vilkårlig konstant. (I utgangspunktet gjelder løsningsformelen for $C = \pm e^D \neq 0$, men når $C = 0$ får vi $y \equiv 0$ som vi allerede har observert er en løsning.)

b) Differensialligningen

$$y' = \frac{x^2}{y^3}$$

er separabel og løses ved samme fremgangsmåte som ovenfor. Separasjon av variablene gir først ligningen

$$y^3 y' = x^2$$

Integrasjon på begge sider gir

$$\int y^3\,dy = \int x^2\,dx$$

det vil si

$$\frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{3}x^3 + D$$

og løsningen blir

$$y = \underline{\underline{\pm\sqrt[4]{\frac{4}{3}x^3 + C}}}$$

c) Differensialligningen

$$(x+1)y' + y^2 = 0$$

har åpenbart den trivielle løsningen $y \equiv 0$. For $y \neq 0$ er den separabel og kan skrives

$$-\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x+1}$$

Integrasjon på begge sider gir

$$\int -\frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

det vil si

$$\frac{1}{y} = \ln|x+1| + C$$

Løsningen blir

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{\ln|x+1| + C}}}$$

d) Differensialligningen

$$xyy' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$$

kan skrives

$$\begin{aligned} xyy' &= (1+x^2) + y^2(1+x^2) \\ &= (1+x^2)(1+y^2) \end{aligned}$$

ved å faktorisere og trekke sammen uttrykket på høyre side. Denne ligningen kan (for $x \neq 0$) skrives på formen

$$\frac{yy'}{1+y^2} = \frac{1+x^2}{x} = \frac{1}{x} + x$$

og er dermed separabel. Integrasjon på begge sider gir

$$\int \frac{y\,dy}{1+y^2} = \int \left(\frac{1}{x} + x\right) dx$$

det vil si

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + D$$

eller med andre ord

$$\ln(1+y^2) = 2\ln|x| + x^2 + D_2$$

Dette betyr at

$$1 + y^2 = e^{2\ln|x| + x^2 + D_2} = x^2 e^{x^2} e^{D_2}$$

altså

$$y^2 = Cx^2 e^{x^2} - 1$$

Løsningen er dermed

$$y = \underline{\underline{\pm\sqrt{Cx^2e^{x^2}-1}}}$$

hvor $C > 0$.

Oppgave 10.4.8

a) For $x > 0$ har vi gitt at funksjonen $y = f(x)$ tilfredsstiller ligningen

$$[f(x)]^2 = \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$$

som også kan skrives

$$x[f(x)]^2 = \int_1^x f(t)\,dt$$

Ved å derivere begge sider av ligningen (vi bruker analysens fundamentalteorem til å derivere høyre side), får vi

$$[f(x)]^2 + 2xf(x)f'(x) = f(x)$$

det vil si

$$y^2 + 2xyy' = y$$

som er ekvivalent med

$$yy' = \frac{y-y^2}{2x}$$

b) Vi skal finne alle løsninger av den opprinnelige ligningen og løser først differensialligningen som vi fant i punkt a). Denne har åpenbart de konstante løsningene $y \equiv 0$ og $y \equiv 1$. Forutsetter vi $y \neq 0$ og $y \neq 1$, blir ligningen separabel og kan skrives

$$\frac{y'}{1-y} = \frac{1}{2x}$$

Integrasjon på begge sider gir

$$\int \frac{1}{1-y}\,dy = \int \frac{1}{2x}\,dx$$

det vil si

$$-\ln|1-y| = \ln\sqrt{x} + D$$

Bytter vi fortegn og bruker eksponentialfunksjonen på begge sider, gir dette

$$e^{\ln|1-y|} = e^{-\ln\sqrt{x}}e^{-D}$$

som betyr at

$$1 - y = \pm\frac{e^{-D}}{\sqrt{x}} = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

Differensialligningen har dermed løsningen

$$\underline{y = 1 - \frac{C}{\sqrt{x}}}$$

i tillegg til de to konstante løsningene ovenfor.

Ifølge punkt a) må alle løsninger $y = f(x)$ av den opprinnelige funksjonsligningen også være løsninger av differensialligningen og altså ha formen $f(x) = 1 - \frac{C}{\sqrt{x}}$. Setter vi en slik funksjon inn i den opprinnelige ligningen, blir venstre side

$$[f(x)]^2 = 1 - \frac{2C}{\sqrt{x}} + \frac{C^2}{x}$$

og høyre side

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt &= \frac{1}{x}\int_1^x \left(1 - \frac{C}{\sqrt{t}}\right)dt \\ &= \frac{1}{x}\left[t - 2C\sqrt{t}\right]_1^x \\ &= 1 - \frac{2C}{\sqrt{x}} + \frac{2C-1}{x}\end{aligned}$$

Disse uttrykkene er identiske hvis og bare hvis $C^2 = 2C - 1$, det vil si $C = 1$. Funksjonsligningen har derfor bare løsningen

$$f(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = \underline{\underline{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}}$$

i tillegg til de konstante løsningene $f(x) = 0$ og $f(x) = 1$.

Oppgave 10.4.9

a) La $N(t)$ være antall individer i dyrebestanden etter t år. En logistisk vekstmodell for dyrebestanden er gitt ved differensialligningen

$$dN/dt = 10^{-4}N(10^4 - N)$$

med initialbetingelsen $N(0) = 4 \cdot 10^3$. Vi observerer først at differensialligningen har de konstante løsningene $N \equiv 0$ og $N \equiv 10^4$.

Forutsetter vi at $N \neq 0$ og $N \neq 10^4$ er differensialligningen separabel og kan skrives

$$\frac{N'}{N(N-10^4)} = -10^{-4}$$

Integrasjon på begge sider gir

$$\int \frac{1}{N(N-10^4)}\,dN = \int -10^{-4}\,dt = -10^{-4}t + C_1$$

Ved delbrøkoppspaltning blir integralet på venstre side

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{N(N-10^4)}\,dN &= 10^{-4}\int\left(\frac{1}{N-10^4} - \frac{1}{N}\right)dN \\ &= 10^{-4}(\ln|N-10^4| - \ln|N| + C_2) \\ &= 10^{-4}\ln\left|\frac{N-10^4}{N}\right| + C_2\end{aligned}$$

Dermed blir ligningen vår

$$10^{-4}\ln\left|\frac{N-10^4}{N}\right| = -10^{-4}t + C_3$$

som er ensbetydende med at

$$\frac{N-10^4}{N} = \pm e^{-t}e^{10^4C_3} = Ce^{-t}$$

det vil si

$$N - 10^4 = Ce^{-t}N$$

som også kan skrives

$$N(1 - Ce^{-t}) = 10^4$$

Løsningen blir dermed

$$N(t) = \frac{10^4}{1 - Ce^{-t}}$$

hvor C er en vilkårlig konstant. (I utgangspunktet gjelder løsningsformelen for $C = \pm e^t \neq 0$, men når $C = 0$ får vi $N \equiv 10^4$ som vi allerede har observert er en løsning.)

Vi bestemmer den ukjente konstanten ved hjelp av initialbetingelsen $N(0) = 4 \cdot 10^3$ som gir oss

$$N(0) = \frac{10^4}{1-C} = 4 \cdot 10^3$$

det vil si

$$C = -\frac{3}{2}$$

Dermed blir dyrebestanden etter t år gitt ved

$$\underline{\underline{N(t) = \frac{10^4}{1 + \frac{3}{2}e^{-t}}}}$$

For å finne hvilken størrelse bestanden vil stabilisere seg på i det lange løp, undersøker vi hva som skjer med $N(t)$ når tiden t vokser over alle grenser:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{10^4}{1 + \frac{3}{2}e^{-t}} = \underline{\underline{10^4}}$$

Bestanden vil altså stabilisere seg på 10 000 dyr.

b) Vi skal heretter anta at det drives jakt på dyrebestanden og at det felles $2.1 \cdot 10^3$ dyr per år. Vi endrer derfor modellen til

$$dN/dt = 10^{-4}N(10^4 - N) - 2.1 \cdot 10^3$$

med initialbetingelse $N(0) = 4 \cdot 10^3$. Høyresiden av ligningen er et annengradspolynom i N med røtter $3 \cdot 10^3$ og $7 \cdot 10^3$, så ligningen kan skrives

$$dN/dt = -10^{-4}(N - 3 \cdot 10^3)(N - 7 \cdot 10^3)$$

På samme måte som i punkt a) observerer vi først at differensialligningen har de konstante løsningene $N \equiv 3 \cdot 10^3$ og $N \equiv 7 \cdot 10^3$. Forutsetter vi at $N \neq 3 \cdot 10^3$ og $N \neq 7 \cdot 10^3$, er differensialligningen separabel og kan skrives

$$\frac{N'}{(N - 3 \cdot 10^3)(N - 7 \cdot 10^3)} = -10^{-4}$$

Integrasjon på begge sider gir

$$\int \frac{1}{(N - 3 \cdot 10^3)(N - 7 \cdot 10^3)}\, dN = \int -10^{-4}\, dt = -10^{-4}t + D_1$$

Ved delbrøkoppspaltning blir integralet på venstre side

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4 \cdot 10^3} \int \left(\frac{1}{N - 7 \cdot 10^3} - \frac{1}{N - 3 \cdot 10^3} \right) dN \\
&\quad = \frac{1}{4 \cdot 10^3} (\ln|N - 7 \cdot 10^3| - \ln|N - 3 \cdot 10^3| + D_2) \\
&\quad = \frac{1}{4 \cdot 10^3} \ln \left| \frac{N - 7 \cdot 10^3}{N - 3 \cdot 10^3} \right| + D_2
\end{aligned}$$

Ligningen vår blir altså

$$\frac{1}{4\cdot 10^3}\ln\left|\frac{N-7\cdot 10^3}{N-3\cdot 10^3}\right| = -10^{-4}t + D_3$$

det vil si

$$\ln\left|\frac{N-7\cdot 10^3}{N-3\cdot 10^3}\right| = -0.4t + D_4$$

som er ensbetydende med at

$$\frac{N-7\cdot 10^3}{N-3\cdot 10^3} = \pm e^{-0.4t}e^{D_4} = De^{-0.4t}$$

det vil si

$$N - 7\cdot 10^3 = De^{-0.4t}(N - 3\cdot 10^3)$$

som også kan skrives

$$N(1 - De^{-0.4t}) = (7 - 3De^{-0.4t})10^3$$

Løsningen blir dermed

$$N(t) = \frac{7 - 3De^{-0.4t}}{1 - De^{-0.4t}}10^3$$

hvor D er en vilkårlig konstant. (I utgangspunktet gjelder løsningsformelen for $D = \pm e^{D_3} \neq 0$, men når $D = 0$ får vi $N \equiv 7\cdot 10^3$ som vi allerede har observert er en løsning.)

Vi bestemmer den ukjente konstanten ved hjelp av initialbetingelsen $N(0) = 4\cdot 10^3$ som gir oss

$$N(0) = \frac{7-3D}{1-D}10^3 = 4\cdot 10^3$$

det vil si

$$D = -3$$

Dermed blir dyrebestanden etter t år gitt ved

$$N(t) = \frac{7 + 9e^{-0.4t}}{1 + 3e^{-0.4t}}10^3$$

For å finne hvilken størrelse bestanden nå vil stabilisere seg på i det lange løp, undersøker vi hva som skjer med $N(t)$ når tiden t vokser over alle grenser:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{7 + 9e^{-0.4t}}{1 + 3e^{-0.4t}}10^3 = \underline{\underline{7\cdot 10^3}}$$

Bestanden vil altså stabilisere seg på 7 000 dyr.

c) Hvis vi istedet starter med 2 000 dyr ved tiden $t = 0$, blir initialbetingelsen istedet $N(0) = 2 \cdot 10^3$ som gir oss

$$N(0) = \frac{7 - 3D}{1 - D} 10^3 = 2 \cdot 10^3$$

det vil si

$$D = 5$$

Løsningen blir i dette tilfellet

$$N(t) = \frac{7 - 15e^{-0.4t}}{1 - 5e^{-0.4t}} 10^3$$

og vi ser at dyrebestanden dør ut så snart telleren i uttrykket for $N(t)$ blir null, det vil si når

$$7 = 15e^{-0.4t}$$

altså når

$$0.4t = \ln \frac{15}{7}$$

det vil si når

$$t = \frac{5}{2} \ln \frac{15}{7} \approx \underline{\underline{1.9}}$$

Dyrebestanden vil altså være utryddet etter ca. 1.9 år.

Kommentar: Det kan være verdt å legge merke til at den gitte differensialligningen forteller en hel del om den kvalitative oppførselen til løsningen, uten at vi bestemmer denne eksplisitt. Ligningen forteller oss at den deriverte

$$dN/dt = 10^{-4}(-N^2 + 10^4 N - 2.1 \cdot 10^7)$$

betraktet som en funksjon av N, er en parabel med et maksimumspunkt fordi dN/dt er på formen $aN^2 + bN + c$ med $a < 0$. Derfor er den deriverte negativ når N tilhører et av intervallene $[0, 3 \cdot 10^3)$ eller $(7 \cdot 10^3, \infty)$ og den er positiv når N tilhører $(3 \cdot 10^3, 7 \cdot 10^3)$. Hvis vi starter med $N = 4 \cdot 10^3$ individer (som i punkt b), er altså den deriverte positiv, og antall dyr vil øke så lenge $N < 7 \cdot 10^3$. Samtidig vil den deriverte avta mot null. Hvis vi starter med $N = 2 \cdot 10^3$ individer (punkt c), er den deriverte negativ og antall dyr vil avta. Startverdiene $N = 7 \cdot 10^3$ og $N = 3 \cdot 10^3$ representerer henholdsvis en stabil og en ustabil likevektstilstand.

Oppgave 10.5.1

a) Differensialligningen

$$y'' + y' - 6y = 0$$

har karakteristisk ligning

$$r^2 + r - 6 = 0$$

med røtter

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

Den generelle løsingen av differensialligningen er dermed

$$y(x) = \underline{\underline{Ce^{-3x} + De^{2x}}}$$

c) Differensialligningen

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

har karakteristisk ligning

$$r^2 + 6r + 9 = (r+3)^2 = 0$$

med løsning

$$r = -3$$

Da den karakteristiske ligningen bare har én rot, så er den generelle løsningen av differensialligningen

$$y(x) = \underline{\underline{Ce^{-3x} + Dxe^{-3x}}}$$

d) Differensialligningen

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

har karakteristisk ligning

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

med røtter

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{16}}{2} = 1 \pm 2i$$

Da den karakteristiske ligningen har to komplekse røtter, blir den generelle løsningen av differensialligningen

$$y(x) = \underline{\underline{e^x(C\cos 2x + D\sin 2x)}}$$

Oppgave 10.5.4

a) Vi skal finne den løsningen av $y'' - 4y' + 4y = 0$ som går gjennom $(0, 1)$ og $(1, -1)$. Den karakteristiske ligningen

$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$$

har bare den ene roten $r = 2$, så den generelle løsningen av differensialligningen er

$$y = Ce^{2x} + Dxe^{2x}$$

Vi bestemmer konstantene ved hjelp av initialbetingelsene:

$$\begin{aligned} y(0) = Ce^0 + D \cdot 0 \cdot e^0 = 1 &\implies \underline{C = 1} \\ y(1) = Ce^2 + D \cdot 1 \cdot e^2 = e^2 + De^2 = -1 &\implies \underline{D = -1 - e^{-2}} \end{aligned}$$

Løsningen er dermed

$$y(x) = \underline{\underline{e^{2x}\big(1 - (1 + e^{-2})x\big)}}$$

b) Vi skal finne den løsningen av $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 0$ som går gjennom $(\frac{\pi}{2}, 1)$ og $(\pi, 1)$. Den karakteristiske ligningen

$$r^2 + r + \frac{5}{4} = 0$$

har løsningene

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{5}{4}}}{2} = \frac{-1 \pm 2i}{2} = \underline{-\frac{1}{2} \pm i}$$

Da vi har har to komplekse røtter, er den generelle løsningen av differensialligningen gitt ved

$$y = e^{-x/2}(C \cos x + D \sin x)$$

Vi bestemmer konstantene ved hjelp av initialbetingelsene:

$$\begin{aligned} y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = e^{-\pi/4}\Big(C \cos \frac{\pi}{2} + D \sin \frac{\pi}{2}\Big) = e^{-\pi/4} D = 1 &\implies \underline{D = e^{\pi/4}} \\ y(\pi) = e^{-\pi/2}\big(C \cos(\pi) + D \sin(\pi)\big) = -Ce^{-\pi/2} = 1 &\implies \underline{C = -e^{\pi/2}} \end{aligned}$$

Den spesielle løsningen er dermed

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-x/2}\big(-e^{\pi/2} \cos x + e^{\pi/4} \sin x\big)}}$$

Oppgave 10.5.8

a) Ved å benytte at

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

får vi omskrivningen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x &= \sin\frac{\pi}{6}\cos 3x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 3x \\ &= \underline{\underline{\sin\Big(3x + \frac{\pi}{6}\Big)}}\end{aligned}$$

b) Ved å benytte at

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{og} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

får vi omskrivningen

$$\begin{aligned}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} &= \sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\Big) \\ &= \sqrt{2}\Big(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}\Big) \\ &= \underline{\underline{\sqrt{2}\sin\Big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\Big)}}\end{aligned}$$

c) Ved å benytte at

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{og} \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

får vi omskrivningen

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos x - \sin x &= 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\Big) \\ &= 2\Big(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\Big) \\ &= \underline{\underline{2\sin\Big(\frac{\pi}{3} - x\Big)}}\end{aligned}$$

Oppgave 10.5.11

To dyrearter lever i et naturlig samspill. Vi lar $N_1(t)$ og $N_2(t)$ være antall individer av hver art ved tiden t. Vi setter

$$\begin{aligned}x(t) &= N_1(t) - 300 \\ y(t) &= N_2(t) - 10\,000\end{aligned}$$

Samspillet mellom artene modelleres ved differensialligningene

$$x'(t) = by(t) \quad \text{og} \quad y'(t) = -cx(t)$$

hvor b og c er positive konstanter.

a) Det er naturlig å forvente at rovdyrbestanden vil vokse raskest når byttedyrbestanden er størst, og at byttedyrbestanden vil avta raskest når rovdyrbestanden er størst. Den første differensialligningen ovenfor sier at x (og dermed N_1) vokser raskest når y (og dermed N_2) er størst. Den andre differensialligningen sier at y (og dermed N_2) avtar raskest når x (dvs N_1) er størst. Det må bety at N_1 er antall rovdyr og N_2 er antall byttedyr.

b) Implisitt derivasjon av ligningen $x'(t) = by(t)$ gir

$$x''(t) = by'(t) = b(-cx(t)) = \underline{\underline{-bcx(t)}}$$

hvor vi har benyttet at $y'(t) = -cx(t)$ ifølge modellen.

c) Vi antar at $x(0) = x_0$ og $y(0) = y_0$. Vi skal finne $x(t)$ og $y(t)$. Vi bruker først ligningen i punkt b) til å finne $x(t)$. Den karakteristiske ligningen $r^2 = -bc$ har løsningene

$$r = \pm i\sqrt{bc}$$

Den generelle løsingen av $x(t)$ blir dermed

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{0t}\big(C\cos(\sqrt{bc}\cdot t) + D\sin(\sqrt{bc}\cdot t)\big) \\ &= C\cos(\sqrt{bc}\cdot t) + D\sin(\sqrt{bc}\cdot t) \end{aligned}$$

Nå kan vi derivere uttrykket ovenfor og bruke differensialligningen $x'(t) = by(t)$ til å finne $y(t)$. Den generelle løsingen av $y(t)$ blir da

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{b}x'(t) &= \frac{1}{b}\big(-C\sqrt{bc}\sin(\sqrt{bc}\cdot t) + \sqrt{bc}D\cos(\sqrt{bc}\cdot t)\big) \\ &= \frac{\sqrt{bc}}{b}\big(D\cos(\sqrt{bc}\cdot t) - C\sin(\sqrt{bc}\cdot t)\big) \end{aligned}$$

Vi bestemmer konstantene ved hjelp av initialbetingelsene

$$\begin{aligned} x(0) &= C\cos(\sqrt{bc}\cdot 0) + D\sin(\sqrt{bc}\cdot 0) = C = x_0 \\ y(0) &= \frac{\sqrt{bc}}{b}(D\cos(\sqrt{bc}\cdot 0) - C\sin(\sqrt{bc}\cdot 0)) = \frac{\sqrt{bc}}{b}D = y_0 \end{aligned}$$

som gir $C = x_0$ og $D = \sqrt{\frac{b}{c}}\,y_0$. Dermed er løsningen

$$x(t) = \underline{\underline{x_0\cos(\sqrt{bc}\cdot t) + \sqrt{\frac{b}{c}}\,y_0\sin(\sqrt{bc}\cdot t)}}$$

$$y(t) = \underline{\underline{y_0\cos(\sqrt{bc}\cdot t) - \sqrt{\frac{c}{b}}\,x_0\sin(\sqrt{bc}\cdot t)}}$$

d) Observasjoner tyder på at de beste verdiene er $b = 0.05$ og $c = 84$. Vi antar at $N_1(0) = 300$ og $N_2(0) = 1400$. Da har vi

$$x_0 = N_1(0) - 300 = 300 - 300 = 0$$
$$y_0 = N_2(0) - 10\,000 = 1\,400 - 10\,000 = -8\,600$$

Dermed er tidsforløpet til utviklingen til artene gitt ved

$$N_1(t) = x(t) + 300 = -\sqrt{\frac{1}{1680}}\,8600\,\sin(\sqrt{4.2}\cdot t) + 300$$
$$N_2(t) = y(t) + 10\,000 = -8600\cos(\sqrt{4.2}\cdot t) + 10\,000$$

(Du må selv skissere grafene til N_1 og N_2. Benytt gjerne Maple.)

Kommentar til grafene: Det er naturlig at toppene (og bunnene) er forskjøvet i forhold til hverandre. Når antall byttedyr er på toppnivå, vokser antall rovdyr raskest. Det medfører at antall byttedyr vil avta slik at veksten i rovdyrstammen blir mindre (antall rovdyr nærmer seg et toppnivå), og etterhvert blir det så få byttedyr at rovdyrene sulter og rovdyrbestanden blir mindre. Da vil antall byttedyr øke igjen, og slik vil det fortsette å svinge.

Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i kapittel 11

I kapittel 11 var det bare seksjonene 11.1 og 11.2 som var pensum høsten 2000. I disse seksjonene er det Taylor-polynomer og Taylors formel med restledd som står i fokus. Siden dette er nytt stoff for de fleste, har jeg laget løsningsforslag til alle oppgavene som ble gitt fra dette kapittelet.

Oppgave 11.1.1

Vi skal finne Taylorpolynomet av grad 4 til $f(x) = e^{x^2}$ i punktet 0, og bestemmer først de deriverte:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{x^2} & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= 2xe^{x^2} & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= (2+4x^2)e^{x^2} & f''(0) &= 2 \\
f'''(x) &= (12x+8x^3)e^{x^2} & f'''(0) &= 0 \\
f''''(x) &= (12+48x^2+16x^4)e^{x^2} & f''''(0) &= 12
\end{aligned}
$$

Taylorpolynomet av grad 4 blir da:

$$
\begin{aligned}
T_4 f(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(0)}{k!}(x-0)^k &= \frac{1}{0!} + \frac{0}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{12}{4!}x^4 \\
&= \underline{\underline{1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4}}
\end{aligned}
$$

Kommentar: Legg merke til at vi kunne ha funnet dette lettere ved først å bestemme Taylorpolynomet $T_2 g(y)$ til $g(y) = e^y$ av grad 2 (se oppgave 11.2.1) og deretter anvende dette på $y = x^2$. Det gir umiddelbart

$$T_4 f(x) = T_2 g(y) = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4$$

Oppgave 11.1.3

Vi skal finne Taylorpolynomet av grad 4 til $f(x) = \sin x$ i punktet $\frac{\pi}{4}$, og bestemmer først de deriverte:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
f'(x) &= \cos x & f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
f''(x) &= -\sin x & f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
f''''(x) &= \sin x & f''''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Taylorpolynomet blir da:

$$
\begin{aligned}
T_4 f(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(\pi/4)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^k &= \frac{\sqrt{2}}{0!\,2} + \frac{\sqrt{2}}{1!\,2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2!\,2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{3!\,2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{4!\,2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 \\
&= \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right)}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 11.1.7

Vi skal finne Taylorpolynomet av grad 3 til $f(x) = \arctan x$ i punktet 0, og bestemmer først de deriverte:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \arctan x & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} & f'''(0) &= -2
\end{aligned}
$$

Taylorpolynomet blir da:

$$
T_4 f(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(0)}{k!}(x-0)^k = \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 = \underline{\underline{x - \frac{1}{3}x^3}}
$$

Oppgave 11.2.1

Vi skal først finne Taylorpolynomet av grad 4 til $f(x) = e^x$ i punktet 0. Her er alle de deriverte lik funksjonen selv, så vi har $f^{(n)}(x) = f(x) = e^x$

og $f^{(n)}(0) = f(0) = 1$. Taylorpolynomet av grad 4 er da:

$$\begin{aligned} T_4 f(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(0)}{k!}(x-0)^k &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= \underline{\underline{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4}} \end{aligned}$$

Vi skal vise at $|R_4 f(b)| < \frac{e^b}{120} b^5$ på intervallet $[0, b]$. Ifølge korollar 11.2.2 er en øvre skranke for restleddet gitt ved at

$$|R_4 f(b)| \leq \frac{M}{(4+1)!}|b-0|^{(4+1)}$$

hvor M er en øvre skranke for $|f^{(4+1)}(x)| = e^x$ på intervallet. Men e^x er en voksende funksjon og antar sin største verdi i høyre endepunkt, så vi kan bruke $M = e^b$ i korollaret. Da følger det umiddelbart at

$$|R_4 f(b)| \leq \frac{M}{(4+1)!}|b-0|^{(4+1)} = \underline{\underline{\frac{e^b}{120}b^5}}$$

Oppgave 11.2.3

Vi skal først finne Taylorpolynomet av grad 3 til $f(x) = \ln x$ i punktet 1, og bestemmer først de deriverte:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & f''(1) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} & f'''(1) &= 2 \end{aligned}$$

Taylorpolynomet av grad 3 er da:

$$\begin{aligned} T_3 f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(0)}{k!}(x-1)^k &= \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 \\ &= \underline{\underline{(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3}} \end{aligned}$$

Vi skal vise at $|R_3 f(b)| < \frac{|b-1|^4}{4}$ på intervallet $[1, b]$. Siden $|f^4(x)| = |-\frac{6}{x^4}| = \frac{6}{x^4}$ er en avtagende funksjon som oppnår sin største verdi i venstre endepunkt, blir $|f^4(x)| \leq 6$ på intervallet $[1, b]$. Ifølge korollar 11.2.2 har vi da

$$|R_3 f(b)| \leq \frac{6}{(3+1)!}|b-1|^{(3+1)} = \underline{\underline{\frac{|b-1|^4}{4}}}$$

Oppgave 11.2.5

Vi skal finne en tilnærmet verdi for $\sqrt{101}$ og vil bruke Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$ i punktet 100. Først bestemmer vi de deriverte:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1/2} & f(100) &= 10 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} & f'(100) &= \frac{1}{20} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} & f''(100) &= -\frac{1}{4000} \end{aligned}$$

Taylorpolynomet av grad 2 er da:

$$\begin{aligned} T_2f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(0)}{k!}(x-100)^k &= \frac{10}{0!} + \frac{1}{1!\,20}(x-100) - \frac{1}{2!\,4000}(x-100)^2 \\ &= 10 + \frac{1}{20}(x-100) - \frac{1}{8000}(x-100)^2 \end{aligned}$$

Vårt estimat for $\sqrt{101}$ blir da:

$$\sqrt{101} \approx T_2f(101) = 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} = \underline{\underline{10.049875}}$$

Til slutt skal vi gi et overslag over nøyaktigheten til estimatet. Vi ser at $|f^3(x)| = |\frac{3}{8}x^{-5/2}|$ avtar når x vokser. Derfor er

$$|f^3(x)| \leq \frac{3}{8}100^{-5/2} = \frac{3}{8}10^{-5}$$

når $x > 100$. Ved korollar 11.2.2 er derfor feilen til estimatet begrenset oppad ved

$$|R_2f(101)| \leq \frac{\frac{3}{8}10^{-5}}{(2+1)!}|101-100|^{(2+1)} = \frac{1}{16}10^{-5} = \underline{\underline{6.25 \cdot 10^{-7}}}$$

Oppgave 11.2.6

Ved å bruke Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen $f(x) = e^x$ i punktet 0 har vi

$$f(x) = T_2f(x) + R_2f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + R_2f(x)$$

der restleddet ifølge korollar 11.2.2 er begrenset ved

$$|R_2f(x)| \leq \frac{e^1}{3!}|x|^3 \leq \frac{1}{2}|x|^3$$

for alle $x < 1$, siden $f'''(x) = e^x$ er voksende. Det følger at

$$\frac{f(x) - 1 - x}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + R_2 f(x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{R_2 f(x)}{x^2}$$

der

$$\left| \frac{R_2 f(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{2}|x|$$

for $x < 1$. Den siste ulikheten viser at $\lim_{x \to 0} \frac{R_2 f(x)}{x^2} = 0$, og dermed at

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{x \to 0} \frac{R_2 f(x)}{x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppgave 11.2.11

a) Vi skal finne Taylorpolynomet av grad 2 til $f(x) = \frac{1}{1+x}$ om punktet 0, og bestemmer først de deriverte.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} & f'(0) &= -1 \\ f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} & f''(0) &= 2 \\ f'''(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} & f'''(0) &= -6 \end{aligned}$$

Taylorpolynomet av grad 2 er da:

$$T_2 f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(0)}{k!}(x - 0)^k = \underline{\underline{1 - x + x^2}}$$

b) Vi skal nå finne en tilnærmet verdi for integralet

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1 + x^4}$$

ved å bruke Taylorpolynomet til f. La $g(x) = f(x^4) = \frac{1}{1+x^4}$. Siden vi har

$$f(x) = T_2 f(x) + R_2 f(x)$$

der korollar 11.2.2 sikrer at

$$|R_2 f(x)| \leq \left| \frac{f'''(0)}{3!} x^3 \right| = \frac{6}{3!} x^3 = x^3$$

for alle $x > 0$, følger det at

$$g(x) = T_2 g(x) + R_2 g(x)$$

der

$$T_2 g(x) = T_2 f(x^4) = 1 - x^4 + x^8$$

og

$$|R_2 g(x)| = |R_2 f(x^4)| \leq x^{12}$$

Dette gir umiddelbart at

$$\int_0^{1/2} g(x)\,dx = \int_0^{1/2} T_2 g(x)\,dx + \int_0^{1/2} R_2 g(x)\,dx$$

der

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} T_2 g(x)\,dx &= \int_0^{1/2} (1 - x^4 + x^8)\,dx \\ &= \left[x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9\right]_0^{1/2} = \frac{11381}{23040} \approx 0.493967\end{aligned}$$

og

$$\left|\int_0^{1/2} R_2 g(x)\,dx\right| \leq \int_0^{1/2} x^{12}\,dx = \left[\frac{1}{13}x^{13}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{106\,496} < 10^{-5}$$

Men det betyr at

$$0.493957 < \int_0^{1/2} g(x)\,dx < 0.493977$$

Merknad: Dersom vi hadde benyttet Lagranges restleddformel (gitt i oppgave 11.2.16), som viser at restleddet $R_2 g(x)$ faktisk er negativt, kunne vi redusert intervallengden til det halve og konstatert at integralet ligger mellom 0.493957 og 0.493967. (Den riktige verdien er 0.493958 med seks korrekte desimaler.)

Oppgave 11.2.14

a) Vi skal vise at det for hver $x \in (-1, \infty)$ finnes et tall z mellom 0 og x slik at

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(1+z)^{\frac{5}{2}}}x^3$$

La $f(x) = \sqrt{x+1}$. Vi vil finne Taylorpolynomet av grad 2 til $f(x)$ i punktet 0, og bestemmer først de deriverte.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+x} & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} & f'(0) &= \frac{1}{2} \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)(1+x)^{-\frac{3}{2}} & f''(0) &= -\frac{1}{4} \\
f'''(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

Taylorpolynomet av grad 2 i punktet 0 blir dermed

$$T_2 f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(0)}{k!}(x-0)^k = \frac{1}{0!} + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}x^2 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

Ved Lagranges restleddsformel (se oppgave 11.2.16) kan restleddet uttrykkes som

$$R_2 f(x) = \frac{f^{(3)}(z)}{3!}(x-0)^3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(1+z)^{\frac{5}{2}}} x^3$$

for en z mellom 0 og x. Ialt har vi da at

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= T_2 f(x) + R_2 f(x) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(1+z)^{\frac{5}{2}}} x^3
\end{aligned}$$

for en z mellom 0 og x.

b) La $g(x) = \frac{1}{3}x^3$. Da er $g'(x) = x^2$ og buelengden s av grafen til $g(x)$ på intervallet $[0,1]$ er gitt ved

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + g'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$$

Tilnærmer vi integranden med Taylorpolynomet av grad 2 til $f(x^4)$ i punktet 0, får vi følgende estimat for buelengden:

$$\begin{aligned}
s &\approx \int_0^1 \Big(1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8\Big)\, dx \\
&= \Big[x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9}x^9\Big]_0^1 \\
&= \Big[x + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{72}x^9\Big]_0^1
\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{72}$$
$$= \underline{\underline{\frac{391}{360}}} \approx 1.086$$

Feilen vi da har gjort, er gitt ved integralet av restleddet:

$$\int_0^1 R_2 f(x^4)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(1+z)^{\frac{5}{2}}} x^{12}\,dx$$
$$\leq \frac{1}{16} \int_0^1 x^{12}\,dx = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{13}x^{13}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{208}}}$$

Dette er mindre enn den tillatte feilmarginen på $\frac{1}{200}$. For å få frem ulikheten benyttet vi at z er positiv (siden z ligger mellom 0 og x^4), slik at $\frac{1}{(1+z)^{\frac{5}{2}}} \leq 1$.

Oppgave 11.2.17

Vi lar $T_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$ være Taylorpolynomet av grad n til funksjonen $f(x)$ om punktet $x = a$. Siden

$$f(x) = T_n f(x) + R_n f(x) = T_{n-1} f(x) + a_n(x-a)^n + R_n f(x)$$

har vi da

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n-1}f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{a_n(x-a)^n + R_n f(x)}{(x-a)^n} = a_n + \lim_{x\to a} \frac{R_n f(x)}{(x-a)^n}$$

Og da $f^{(n+1)}(x)$ er kontinuerlig, og dermed begrenset, i en (lukket) omegn om a, finnes det en M slik at $|R_n f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ (korollar 11.2.2). Men da blir

$$\left|\frac{R_n f(x)}{(x-a)^n}\right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|$$

for alle x i en slik omegn. Dette viser at $\lim_{x\to a} \frac{R_n f(x)}{(x-a)^n} = 0$. Ialt har vi dermed vist at

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n-1}f(x)}{(x-a)^n} = a_n$$