LØSNINGSSKISSER AUGUSTEKSAMEN 2014
MA1101

Forbehold om regnefeil! Kari Hag

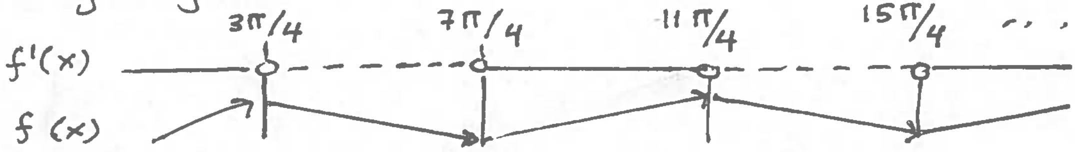
Oppgave 1 $f(x) = e^x \sin x$, $x > 0$

a) $\underline{f'(x)} = e^x(\sin x + \cos x) = \underline{\sqrt{2}\, e^x \sin(x + \frac{\pi}{4})}$

Formelark

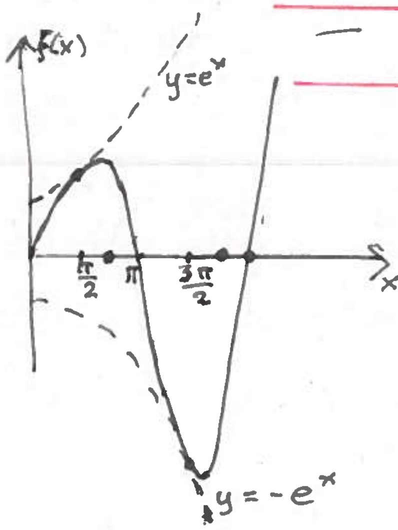
b) Kritiske punkt $x + \frac{\pi}{4} = n\pi$; $\underline{x = n\pi - \frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{N}}$

Fortegnsskjema



Funksjonen har altså $\underline{\text{lokalt maks. i } \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}, \ldots}$

$\underline{\text{— min. i } \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{23\pi}{4}, \ldots}$



Grafen vil svinge mellom $+e^x$ og $-e^x$

Oppgave 2 $y' - \frac{2}{x} y = x^3$, $x > 0$

Dette er en lineær 1. ordens diff. ligning, og vi bruker metoden med integrerende faktor: $F = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$

Altså
$$\frac{1}{x^2} y' - \frac{2}{x^3} y = x, \quad x > 0$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} y\right) = x, \quad x > 0$$
$$\frac{1}{x^2} y = \frac{x^2}{2} + C, \quad x > 0$$

dvs. $\underline{y = \frac{1}{2} x^4 + Cx^2,\ x > 0}$

Oppgave 3

$f(x) = 2e^{-2x} + e^{-x} + 1$ har en omvendt funksjon f^{-1} da f er strengt avtagende siden $f'(x) = -4e^{-2x} - e^{-x} < 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. $D_{f^{-1}} = V_f = (1, \infty)$ da $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ og $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ slik at f avtar fra ∞ til 1. Da $f(0) = 4$, vil

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{-4e^0 - e^0} = -\frac{1}{5}$$

Oppgave 4

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt = \lim_{u\to 0^+} \frac{\int_0^u e^{-t^2}\,dt}{u} \underset{\substack{\text{l'H} \\ +\text{Int. Fu. T.}}}{=} \lim_{u\to 0^+} \frac{e^{-u^2}}{1} = 1$$

og

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 \underset{\text{KJENT}}{=} e^2$$

Alt. $x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+2t)}{t} \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{1+2t} = 2$

slik at $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty} x \ln(1 + 2/x)} = e^2$

Oppgave 5

Vi bruker delvis integrasjon.

a) $I = \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$

$$\left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx\right]$$

$$2I = e^x(\sin x + \cos x) + C$$

$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + K$ der K vilk. konstant

b) $I = \int \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\arctan(x+1)}_{v}\,dx = x\arctan(x+1) - \int \frac{x}{1+(x+1)^2}\,dx$

$$= x\arctan(x+1) - \int \frac{(x+1)-1}{1+(x+1)^2}\,dx$$

$$I = x\arctan(x+1) - \frac{1}{2}\ln\left(1+(x+1)^2\right) + \arctan(x+1) + C$$

$$I = (x+1)\arctan(x+1) - \frac{1}{2}\ln\left(1+(x+1)^2\right) + C$$

Oppgave 6

Volumet av sylinderen er $V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 l$ der d står for diameter, l for lengde. Har

$0 \le l \le 80$, $l + 2d \le 102$, og $l + 2d = 102$ for største diameter (og volum) når l er gitt. Vi skal altså finne største verdi av

$$V = \frac{\pi}{16}(102-l)^2 l \quad \text{når} \quad 0 \le l \le 80.$$

Problemet har løsning som kan finnes ved å sammenligne verdiene i endepunkter og kritiske punkt!

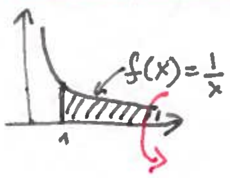
$$\frac{dV}{dl} = \frac{\pi}{16}\left[-2(102-l)l + (102-l)^2\right] = \frac{\pi}{16}(102-l)(-2l+102-l)$$

$$\frac{dV}{dl} = 0 \text{ når } 3l = 102 \Leftrightarrow \underline{l = 34} \quad (l = 102 > 80)$$

$$V(0) = \underline{0}, \quad V(34) = \frac{\pi}{16} 68^2 \cdot 34 = \underline{9826\pi}, \quad V(80) = \frac{\pi}{16} 22^2 \cdot 80 = \underline{2420\pi}$$

Lengden av den største rullen som kan sendes i posten er 34 cm.

Oppgave 7



$$\underline{A} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^{\infty} = \underline{\infty}$$

$$\underline{V} = \int_1^{\infty} \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\frac{\pi}{x}\Big]_1^{\infty} = \underline{\pi}$$

Oppgave 8

$\varepsilon > 0$ gitt: $\quad |f(x) - f(0)| = |5x \sin\frac{1}{x} - 0| \le 5|x|$ når $x \ne 0$.

Altså vil $\underline{|f(x) - f(0)| < \varepsilon}$ når $\underline{|x - 0|} = |x| < \underline{\varepsilon/5 = \delta}$; f kont. i $x=0$.

Men

f er ikke deriverbar i $x = 0$. Dette innser vi ved å bruke definisjonen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x \sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} 5\sin\frac{1}{x}$$

som ikke eksisterer; $\sin\frac{1}{x}$ oscillerer mellom $+1$ og -1 når $x \to 0$.