MA 1101/6101, 13/12-2011

LØSNINGER:

OPPGAVE 1

(a) $\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$ Vi substituerer:
$u = x^2+2x+3$

og får $du = (2x+2)\,dx$. Dette gir:

$$\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx = \int \frac{du}{u^{1/2}} = 2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \underline{2\sqrt{x^2+2x+3} + C}$$

(b)
$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$
$$= e^x \sin x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx\right]$$

som gir:
$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x(\sin x + \cos x) + K$$

eller $\int e^x \cos x\,dx = \underline{\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + K'}$

(c) $$\int_0^2 e^x \cosh x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^x(e^x + e^{-x})\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (e^{2x}+1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}+x\right]\Big|_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}e^4+2\right) - \left(\frac{1}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{4}e^4 + 1 - \frac{1}{4}$$
$$= \underline{\frac{1}{4}e^4 + \frac{3}{4}}$$

OPPGAVE 2

$$r^2 + r - 2 = 0$$

gir $(r+2)(r-1) = 0$. Dette gir den allmenne lösning:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

og $$y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$$

$$C_1 + C_2 = y(0) = 1$$
$$C_1 - 2C_2 = y'(0) = 0$$

gir: $C_2 + 2C_2 = 1 - 0 = 1 \qquad 3.C_2 = 1$

$C_2 = \frac{1}{3}$, $C_1 = 1 - C_2 = \frac{2}{3}$.

Løsningen blir derfor:

$$\underline{y = \tfrac{2}{3}e^{x} + \tfrac{1}{3}e^{-2x}}$$

OPPGAVE 3

(a) $\dfrac{1}{x^2 - x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1}$ gir $A = -1$, $B = 1$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x} = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} = -\ln|x| +$$

$$\ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

(Tallverdien kan utelates når $x > 1$)

(b)

$$(x^2 - x)y' + y = x^2 - 1 \qquad ; \qquad x > 1,$$

er ekvivalent med:

$$y' + \frac{1}{x^2 - x}\, y = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

Vi velger:

$$P(x) = \int p(x)\,dx = \int \frac{dx}{x^2 - x} = \ln \frac{x-1}{x}$$

$e^{P(x)} = e^{\ln \frac{x-1}{x}} = \dfrac{x-1}{x}$ blir integrerende faktor. Vi har da:

$$\frac{x-1}{x} \cdot y' + \frac{1}{x^2} \cdot y = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x-1}{x}$$

eller

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x}\, y\right) = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

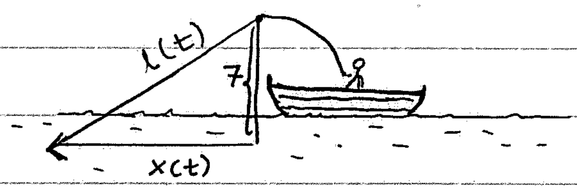
som gir:

$$\frac{x-1}{x}\, y = x + \frac{1}{x} + C$$

$$y = \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} + C\frac{x}{x-1}$$

$$= \underline{\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{Cx}{x-1}}$$

OPPGAVE 4



Vi har alltid: $l(t)^2 = 7^2 + x(t)^2$ ved Pytagoras. Derivasjon på begge sider gir:

$(\triangledown)$ $\quad \cancel{2}\,l(t) \cdot l'(t) = \cancel{2}\,x(t)\,x'(t)$

Vi har at $x'(t) = 3$ m/sek. Ved tiden $t = t_1$ er $l(t_1) = 9$ m/sek. Da blir:

$$x(t_1) = (9^2 - 7^2)^{1/2} = (81-49)^{1/2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Fra identiteten $(\triangledown)$ får vi da:

$$l'(t_1) = \frac{x(t_1)}{l(t_1)} \cdot x'(t_1) = \frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot 3 = \underline{\frac{4}{3}\sqrt{2} \text{ m/s.}}$$

OPPGAVE 5

(a) $$\frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \begin{cases} x & \text{når } x < -2 \\ -x & \text{når } -2 < x < 0 \end{cases}$$

siden $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x \;; & \text{når } x < -2 \text{ og } x > 0 \\ -x^2 - 2x \;; & \text{når } -2 < x < 0 \end{cases}$$

Dette gir $\displaystyle\lim_{x \to -2-} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = -2$

og $\displaystyle\lim_{x \to -2+} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = 2$

Altså eksisterer $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2}$ ikke!

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \begin{cases} \frac{-x^2-2x}{x} = -x-2 & \text{når} \quad x<0 \\ \frac{x^2+2x}{x} = x+2 & \text{når} \quad x>0 \end{cases}$$

Dette gir: $\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -2$

og $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 2$

Følgelig vil

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

ikke eksistere. Funksjonen er m.a.o. ikke deriverbar for $x=-2$ og for $x=0$.

(b) Mulige lokale ekstrema finnes der $f'(x)$ ikke eksisterer og der $f'(x)=0$.

$-2<x<0$: $f(x) = -x^2-2x$, $f'(x) = -2x-2$ $=0$ når $x=-1$.

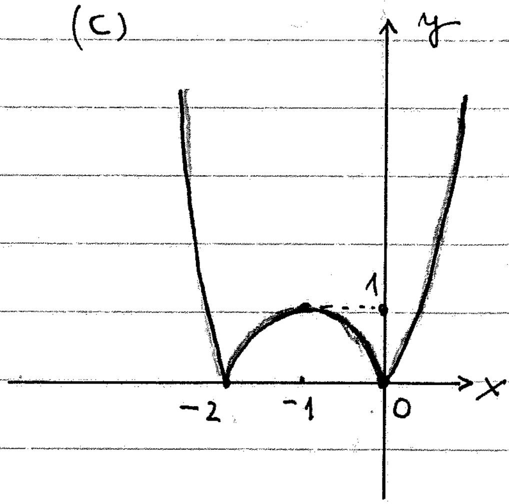
$x<-2$ eller $x>0$: $f(x) = x^2+2x$, $f'(x) = 2x+2$. $\neq 0$ fordi $x=-1$ er den eneste verdi som gjør $f'(x)=0$, og denne x-verdi ligger ikke i disse områder.

Altså mulige lokale ekstrema: $x=-2$, $x=-1$, $x=0$

$f''(-1) = -2$ gir lokalt maksimum i $(-1,1)$.

Siden $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ har funksjonen ikke globalt maksimum. Globale minima i $(-2,0)$ og i $(0,0)$ siden $f(x)\geq 0$ for alle x.

(c)



OPPGAVE 6:

Vi antar at

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{og} \quad \lim_{x \to a} f(x) = M$$

Vi antar at $L \neq M$ (RAA-antagelse)

Vi velger $\varepsilon = \frac{1}{2}|L - M| > 0$. Ut fra antagelsen vil vi da ha at det finnes en $\delta_1 > 0$ s.a. når

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{og} \quad x \in \mathcal{D}(f),$$

så vil:

$$(\triangledown) \qquad |f(x) - L| < \frac{1}{2}|L - M|$$

Av samme grunn finnes det en $\delta_2 > 0$ s.a. når

$$0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{og} \quad x \in \mathcal{D}(f),$$

så må:

$$(\triangledown\triangledown) \qquad |f(x) - M| < \frac{1}{2}|L - M|$$

Dersom $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, så gjelder begge ulikheter $(\triangledown)$ og $(\triangledown\triangledown)$ ovenfor for hver $x \in \mathcal{D}(f)$ og dessuten er s.a. $0 < |x - a| < \delta$. For en slik x-verdi har vi da:

$$|L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \overset{\text{Trekant-ulikhet}}{\leq}$$

$$|L - f(x)| + |f(x) - M| \overset{(*)}{<} \frac{1}{2}|L - M| + \frac{1}{2}|L - M|$$

$$= |L - M|$$

P.g.a av ulikheten ved $(*)$ har vi altså:

$$|L - M| < |L - M|,$$

en selvmotsigelse. Altså må $L = M$.

MERKNAD TIL OPPG. 6:

En del forsto ikke problemet. Noen påstår at siden

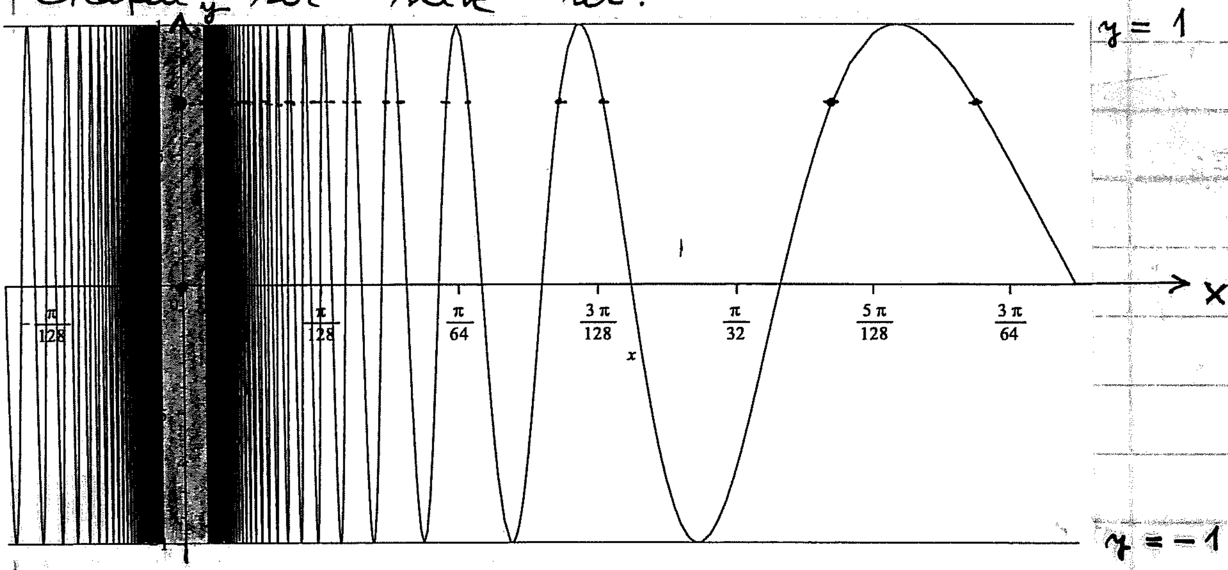
(∇) $L = \lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = M$,

så må jo $L = M$. M.a.o. tror man at $f(a)$ er definert siden $\lim_{x \to a} f(x)$ eksisterer og at da vil likhetene (∇) være opplagt. Men her er ingenting sagt om at f skal være kontinuerlig i $x = a$, m.a.o. at $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Man vil antagelig forstå problemstillingen bedre ved å studere fölgende funksjon:

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ (Ikke definert for $x = 0$)

Grafen ser slik ut:



Her er det nærliggende å tro at $\lim_{x \to 0} f(x)$ kunne være alle mulige verdier i intervallet $[-1, 1]$. (Se på punktene merket på figuren som nærmer seg en y-verdi på y-aksen!)